Wielkopolska

Liga

Matematyczna

XV W L M – Z E S T A W **A**

- zadania dla kategorii *Junior* (klasy 7 i 8 szkół podstawowych): A1, A2, A3, A4
- zadania dla kategorii *Senior* (klasy 1 i 2 szkół ponadpodstawowych): A3, A4, A5, A6
- zadania dla kategorii *Weteran* (klasy 3, 4 i 5 szkół ponadpodstawowych): A5, A6, A7, A8

A1. Liczby nieujemne x, y i z spełniają nierówności:

$$2 \leqslant x + y \leqslant 3, \qquad 4 \leqslant y + z \leqslant 5.$$

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość $z + x$.

A2. Punkt P leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ i spełnia równości:

$$|DP| = |AB|, \qquad |AP| = |CP| = |BC|.$$

Udowodnić, że $|\sphericalangle DAP| = 8|\sphericalangle ABP|$.

A3. Każdą liczbę całkowitą pomalowano na pewien kolor. Wiadomo, że dla każdej pary a, b liczb całkowitych liczby $a + b$ i $a - b$ mają ten sam kolor. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, które wykorzystano?

A4. Liczby całkowite dodatnie a i b spełniają równość

$$2 \cdot \mathtt{NWW}(a, b) + 3 \cdot \mathtt{NWD}(a, b) = 4a + b + 6.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości liczby b.

A5. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rosnąca. Dowieść, że jeśli $x \in (a, b)$, to

$$ab + x^2 + f(a)f(b) + f(x)^2 < x(a + b) + f(x)\big(f(a) + f(b)\big).$$

A6. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg, przy czym $|AB| = |BD|$ oraz $|CD| = |DE|$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie X, odcinki AC i BD w punkcie Y, a półproste $AC^{\rightarrow}$ i $ED^{\rightarrow}$ w punkcie Z. Udowodnić, że prosta XZ przechodzi przez środek odcinka DY.

A7. Na płaszczyźnie leży pewna (skończona) liczba okręgów, przy czym żadne dwa z nich nie są styczne i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Każdy punkt, który należy do pewnego okręgu i leży we wnętrzu nieparzystej liczby okręgów, pomalowano na zielono. Wszystkie punkty przecięcia się okręgów również są zielone. Dowieść, że zbiór zielonych punktów można podzielić na parami rozłączne krzywe zamknięte bez samoprzecięć.

A8. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p o następującej własności:
Dla każdego $r \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ istnieją takie liczby całkowite a i b niepodzielne przez p, że liczba $a^2 + b^2$ daje resztę r z dzielenia przez p.

Rozwiązania powyższych zadań należy przesłać za pośrednictwem strony internetowej ***wlm.wmi.amu.edu.pl*** w terminie do

31 stycznia 2024 r., godz. 20:00.

Prace powinny być **w formacie PDF**. Akceptowane są skany rozwiązań napisanych ręcznie i rozwiązania zredagowane na komputerze. Przed wysłaniem rozwiązań zadań prosimy zapoznać się z regulaminem dostępnym na wyżej wymienionej stronie internetowej.