I Wielkopolska Liga Matematyczna Gimnazjalistów

A1. Dany jest deltoid $ABCD$ o polu powierzchni równym S. Niech punkty W, X, Y, Z będą odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA. Wyznaczyć pole czworokata $WXYZ$.

A2. Czy liczbę 1 można przedstawić w postaci sumy ułamków $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$, w której a, b, c, d są liczbami naturalnymi nieparzystymi? Uzasadnić odpowiedź.

A3. Mąż i żona mają razem 70 lat. Mąż jest dwa razy starszy niż jego żona była wówczas, gdy on miał tyle lat, ile ona ma teraz. Ile lat ma mąż, a ile żona?

A4. Obliczyć sumę cyfr, których użyto do zapisu liczb od 1 do 1000.

A5. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których każda z liczb:

$$n, \qquad n+2, \qquad n^2+5n+1$$

jest pierwsza.

B1. Punkty A i B leżą na okręgu ω o promieniu r. Udowodnić, że można wskazać taki punkt C na okręgu ω, że trójkąt ABC ma obwód większy niż $4r$.

B2. Czy czworokąt, którego każdy bok ma długość 1 m może mieć pole mniejsze niż 1 cm^2? Uzasadnić odpowiedź.

B3. Na obu stronach każdej z 999 kart znajduje się jedna liczba: 1 albo 2. Karty zostały ułożone na stole, następnie zsumowano wszystkie 999 widocznych liczb. Po odwróceniu kart ponownie szumowano 999 widocznych liczb i otrzymano taką samą sumę. Wykazać, że na obu stronach którejś z kart napisano tę samą liczbę.

B4. Dany jest 100-kąt foremny $A_1A_2\ldots A_{100}$. Każdemu z wierzchołków chcemy przypisać jedną liczbę ze zbioru $\{1,2,\ldots,20\}$ w taki sposób, by suma liczb w każdych dwóch wierzchołkach była liczbą pierwszą. Na ile sposobów można to zrobić?

B5. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniają warunek $a^2+b^2+c^2=12$. Dowieść, że

$$(a+x)(b+x)(c+x) \leqslant x^3+6x^2+12x+8$$

dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x.

C1. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n, dla której liczba $n-3$ dzieli się przez 180 oraz liczba $n+1$ dzieli się przez 7.

C2. Liczby a, b, c są dodatnie. Wykazać, że

$$\sqrt[n]{a+b+c} < \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}$$

dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$.

C3. Czy każdy wypukły 2016-kąt można podzielić na trójkąty równoramienne? Uzasadnić odpowiedź.

C4. Wyznacz wszystkie liczby całkowite n, dla których każda z liczb:

$$\frac{8n-4}{n^2+3n+2}, \qquad \frac{3n^2-8n+6}{3n^2-5n-3}$$

jest liczbą naturalną.

C5. Czy szachownicę o wymiarach 99×99 można pokryć prostokątami o wymiarach 1×6 w taki sposób, aby niezakryte pozostały jedynie trzy narożne pola? Uzasadnić odpowiedź.

II Wielkopolska Liga Matematyczna Gimnazjalistów

A1. W każde z wybranych 18 pól szachownicy o wymiarach 6×6 wpisano liczbę $+1$, a w pozostałe pola liczbę -1. Możemy zmieniać jednocześnie znaki wszystkich liczb w wybranym wierszu lub kolumnie. Wykazać, że nie można w ten sposób otrzymać szachownicy z dokładnie jedną liczbą $+1$.

A2. Dany jest trójkąt ABC, w którym

$$|\sphericalangle ACB| = 90^\circ, \qquad |\sphericalangle ABC| = 60^\circ, \qquad |AB| = c.$$

W zależności od c wyznaczyć długość promienia okręgu o środku B, który dzieli trójkąt ABC na dwie figury o równych polach.

A3. Uporządkować rosnąco liczby: 7^{8^9}, 8^{9^7}, 9^{7^8}. Uzasadnić odpowiedź.

A4. Punkty M i N są środkami boków odpowiednio AB i BC kwadratu $ABCD$. Odcinki CM i DN Przecinają się w punkcie S. Wykazać, że pole trójkąta CSN stanowi $\frac{1}{20}$ pola kwadratu $ABCD$.

A5. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, których nie da się zapisać w postaci sumy dwóch liczb złożonych (niekoniecznie różnych).

B1. W zapisie dziesiętnym liczby naturalnej k występują wyłącznie cyfry 1, 2, 3, 4, każda z nich po 9876 razy. Rozstrzygnąć, czy jest możliwe, by liczba k była sześcianem liczby naturalnej.

B2. Liczby rzeczywiste $a, b, c \geqslant \frac{1}{6}$ spełniają warunek $a + b + c = 1$. Wykazać, że

$$\sqrt{6a-1} + \sqrt{6b-1} + \sqrt{6c-1} \leqslant 3.$$

B3. Niech h_1, h_2, h_3 będą wysokościami trójkąta T, a h_1', h_2', h_3' – trójkąta T'. Wiadomo, że $h_1 = h_1'$, $h_2 = h_2'$ i $h_3 = h_3'$. Czy z tego wynika, że trójkąty T i T' są przystające? Uzasadnić odpowiedź.

B4. W kole o promieniu 22 wyróżniono 2017 punktów. Udowodnić, że pewne dwa wyróżnione punkty są końcami odcinka o długości nieprzekraczającej $\sqrt{2}$.

B5. Na wieczorku zapoznawczym spotkało się siedem osób. Okazało się, że każda z nich zna dokładnie dwie inne, które przybyły na to spotkanie. Zakładamy przy tym, że jeśli osoba A zna B, to B zna A. Udowodnić, że wszyscy uczestnicy spotkania mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, by każdy siedział pomiędzy osobami, których nie zna.

C1. Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz trójkąta równobocznego ABC. Punkty D, E, F są rzutami punktu P na odpowiednio AB, BC, CA. Dowieść, że wartość wyrażenia

$$\frac{|PD| + |PE| + |PF|}{|AD| + |BE| + |CF|}$$

C2. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielościan wypukły, którego liczba wierzchołków i liczba ścian są różnymi liczbami pierwszymi.

C3. Czy istnieje taka liczba naturalna n, że $\sqrt{n^2 + 7n + 13}$ jest liczbą naturalną? Uzasadnić odpowiedź.

C4. Niech $S(n)$ oznacza sume cyfr liczby n. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których zachodzi równość

$$n + S(n) + S(S(n)) + S(S(S(n))) = 2017.$$

C5. W pudełku znajduje się $n > 0$ kulek. Ania i Bartek wykonują ruchy na przemian: każdy może wyjąć z pudełka jedną, dwie lub pięć kulek. Wygrywa ten, kto pozostawi przeciwnikowi puste pudełko. Dla jakich n Ania może zwyciężyć niezależnie od ruchów Bartka? Podać strategię Ani dla tych n.

III Wielkopolska Liga Matematyczna Juniorów

A1. Na lewej i prawej gałęzi pewnego drzewa siedziało łącznie 60 gołębi. Po godzinie zawiał mocny wiatr ze wschodu i połowa gołębi z prawej gałęzi przefrunęła na lewą. Po upływie kolejnej godziny wiatr zmienił kierunek i połowa gołębi z lewej gałęzi przefrunęła na gałąź prawą. Okazało się, że na każdej gałęzi siedzi teraz tyle samo gołębi, co na początku. Ile gołębi siedziało na każdej gałęzi na początku?

A2. Czy któryś z boków trójkąta może być krótszy od jego najkrótszej wysokości? Uzasadnić odpowiedź.

A3. Na osi liczbowej znajduje się pchła, która skacze zawsze o jednostkę w prawo lub w lewo. Na początku pchła znajduje się w punkcie 0 i wykonuje pierwszy skok na 1. Jeżeli pchła wskoczy na liczbę, na której jeszcze nie była, to zmienia kierunek (przykładowo, jeśli ostatni skok wykonała w lewą stronę, to następny wykona w prawą). W przeciwnym razie podąża dalej w tę samą stronę. W którym miejscu będzie pchła po 2018 skokach?

A4. Okręgi o_B i o_C o promieniach odpowiednio b i c są styczne zewnętrznie i leżą po tej samej stronie ich wspólnej stycznej ℓ. Okrąg o_A o promieniu $a < b, c$ jest styczny zewnętrznie do okręgów o_B i o_C oraz do prostej ℓ. Udowodnić, że $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$.

A5. Liczba $234234234234\ldots$ kończy sią cyfrą 2, 3 lub 4. Czy ta liczba może być kwadratem liczby naturalnej?

B1. Punkt E leży wewnątrz kwadratu $ABCD$. Wykazać, że jeśli trójkąt AEB ma mniejsze pole niż trójkat BEC, to trójkąt CED ma większe pole niż trójkąt DEA.

B2. Czy istnieje liczba trzycyfrowa, która jest równa podwojonemu iloczynowi swoich cyfr? Uzasadnić odpowiedź.

B3. Piotr zebrał w lesie 3,1 kg grzybów. Cztery najcięższe ważyły łącznie 1 kg. Pięć najlżejszych również ważyło łącznie 1 kg. Ile grzybów zebrał Piotr?

B4. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równości:

$$a + b + c = 2018, \qquad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{2018}.$$

Wyznaczyć wartość wyrażenia $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

B5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|\sphericalangle BAC| = 100^\circ$. Dwusieczna kąta ACB przecina odcinek AB w punkcie D. Udowodnić, że $|CD| + |DA| = |BC|$.

C1. Niech $\overline{pq}$ oznacza dwucyfrową liczbę naturalną z cyfrą dziesiątek p i cyfrą jedności q. Dla jakich cyfr a, b, c wartości ilorazów $\overline{ab} : \overline{ba}$ i $\overline{bc} : \overline{cb}$ są równe i jednocześnie różne od 1?

C2. Gra polega na wypisywaniu na przemian przez dwóch graczy kolejnych cyfr dowolnej liczby 18-cyfrowej. Jeżeli otrzymana liczba jest podzielna przez 9, to wygrywa osoba rozpoczynająca grę, w przeciwnym razie wygrywa drugi gracz. Obowiazują nastepujące reguły:
(1) pierwsza cyfra nie może byc zerem;
(2) po cyfrze różnej od 9 można napisać tylko cyfrę wiekszą;
(3) po cyfrze 9 można wpisać dowolną cyfrę.
Który gracz ma strategię wygrywającą i jaka ona jest?

C3. Dany jest szesciokąt foremny $ABCDEF$. Na odcinku DE wybrano taki punkt P, że odcinki AD, CE i BP przecinają się w jednym punkcie. Który z odcinków jest dłuższy: DP czy EP?

C4. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb naturalnych (a, b, c), w których $a < b < c$ są długościami boków trójkąta prostokątnego o polu równym $a + b + c$.

C5. Z kostek domina 2×1 zbudowano kwadrat $n \times n$. Następnie usuwano kolejno po jednej kostce sąsiadującej z przynajmniej trzema innymi, jeszcze nie usuniętymi kostkami. Czynność tę powtarzano, dopóki było to możliwe. Dowieść, że na końcu pozostało przynajmniej $\frac{2}{3}n$ kostek.
(Uwaga. Kostki sasiadują, jeżeli mają przynajmniej jedną jednostkę wspólnego brzegu.)

IV Wielkopolska Liga Matematyczna Juniorów

A1. Czy sześcian można rozciąć na 49 mniejszych sześcianów? Odpowiedź uzasadnić.

A2. Na przyjęcie przyszła pewna liczba gości, pomiędzy 50 a 150. Gospodarz postanowił usadzić ich po cztery osoby przy każdym stole, ale nie udało się to, ponieważ jedna osoba musiałaby wtedy usiąść sama. Spróbował po pięć – również pozostała jedna osoba. Ostatecznie goście usiedli w pięć osób przy jednym stole, a po sześć przy kilku innych. Ilu gości było na tym przyjęciu?

A3. Wyznaczyć wszystkie trójki (x, y, z) liczb naturalnych, które spełniają równość

$$3^x + 3^y + 3^z = 3^{2019}.$$

A4. Na przekątnej BD prostokąta $ABCD$ wybrano takie punkty E i F, że czworokąt $AECF$ jest rombem o kącie ostrym 60° i polu P. Wykazać, że pole prostokąta $ABCD$ jest równe $P\sqrt{3}$.

A5. Spośród wierzchołków 15-kąta foremnego chcemy wybrać takie cztery, z których każde dwa są końcami pewnej jego przekątnej. Na ile sposobów można to zrobić?

A6. Pewna liczba naturalna 2019-cyfrowa jest równa sumie k-tych potęg jej cyfr. Dowieść, że $k > 2019$.

B1. Na tablicy napisano cztery liczby. Jeśli zmażemy pierwszą z nich, suma pozostałych wynosić będzie 42. Suma pozostałych wyniesie 40, jeśli zmażemy drugą, 38 jeśli trzecią, a 36 jeśli czwartą. Wyznaczyć te liczby.

B2. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Przez punkt H przechodzi symetralna odcinka AB. Udowodnić, że trójkąt ABC jest równoramienny.

B3. Niech $P(n)$ oznacza iloczyn cyfr liczby naturalnej n, na przykład $P(334) = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ lub $P(207) = 2 \cdot 0 \cdot 7 = 0$. Obliczyć sumę

$$P(1) + P(2) + P(3) + \ldots + P(2019).$$

B4. Dany jest sześciokąt wypukły, w którym żadne dwie przekątne nie są równoległe. Udowodnić, że proste zawierające pewne dwie przekątne tego sześciokąta przecinają się pod kątem o mierze co najwyżej 25°.

B5. Dwudziestojednokąt $A_1A_2A_3 \ldots A_{21}$ jest foremny. Dowieść, że przekątne

$$A_1A_{13}, \qquad A_4A_{17}, \qquad A_9A_{19}$$

przecinają się w trzech punktach, które są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

B6. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 + |y - z| &= yz + 1 \\ y^2 + |z - x| &= zx + 1 \\ z^2 + |x - y| &= xy + 1. \end{cases}$$

C1. Wyznaczyć najmniejszą dodatnią wielokrotność liczby 72, w której zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry 0 i 1.

C2. W trójkącie ABC dane są $|AC| = 4$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 150^\circ$. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta, przy czym spełniona jest równość $|AD| = 3|CD|$. Obliczyć długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka B.

C3. Do wyłożenia kwadratowej posadzki o boku długości n użyto k kwadratowych płytek o bokach, których długości wyrażają się liczbami naturalnymi $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Niech $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Udowodnić, że liczby m i n są albo obie parzyste, albo obie nieparzyste.

C4. Liczby a, b, c i d są długościami boków pewnego czworokąta. Dowieść, że

$$1 < \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} < 2.$$

C5. Dany jest trójkąt ABC z kątem prostym przy wierzchołku C. Punkty Q i R leżą odpowiednio na odcinkach BC i CA, a punkty P i S – na odcinku AB. Wykazać, że

$$|PQ| + |QR| + |RS| \geqslant 2h,$$

przy czym h jest wysokością trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C.

C6. Niech $C(n)$ oznacza liczbę cyfr w zapisie dziesiętnym liczby naturalnej n. Dla przykładu $C(5) = 1$, $C(120) = 3$. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba naturalna k, spełniająca równość

$$C(k) + C(k^2) + C(k^3) + \ldots + C(k^8) = 2019.$$