

Z A D A Ñ

Tytuł: 10^2 zadań na 10-lecie WLM

Autor: Bartłomiej Bzdęga

Recenzent: Michał Krych

Skład i łamanie wierszy: Bartłomiej Bzdęga

Rysunki: Bartłomiej Bzdęga

Projekt okładki: Bartłomiej Bzdęga

ISBN 978-83-958421-0-8

Copyright © 2020 by Bartłomiej Bzdęga

Wydawca: Bartłomiej Bzdęga

Przedmowa

Książeczka ta zawiera zadania przeznaczone przede wszystkim dla poważnie zainteresowanych matematyką uczniów szkół średnich oraz nauczycieli takich uczniów. Wszystkie zebrane tu zadania pochodzą z pierwszych dziesięciu edycji Wielkopolskiej Ligi Matematycznej.

Wielkopolską Ligę Matematyczną stworzyliśmy w 2010 roku z profesorem Krzysztofem Pawałowskim. Od samego początku konkursowi przyświecają następujące idee. Po pierwsze, staramy się wypełnić lukę w poziomie trudności zadań maturalnych i olimpijskich – duża część ligowych zadań jest niewiele trudniejsza od maturalnych zadań na dowodzenie, ale pojawiają się też zadania, które sprawiają trudności nawet weteranom Olimpiady Matematycznej. Po drugie, konkurs jest wyłącznie korespondencyjny; uczniowie pracują, podobnie jak zawodowi matematycy, bez nadmiernej presji czasowej i z dostępem do źródeł wiedzy. Rzecz jasna, wiąże się to z możliwością popełniania nieuczciwości, jednak – jak dotychczas – skala tego zjawiska jest na szczęście znikoma i oby tak pozostało.

Zaprezentowane tu zadania w większości są mojego autorstwa, choć nie jestem w stanie zagwarantować ich absolutnej oryginalności wobec przytłaczającej liczby zadań, które pojawiły się w wieloletniej historii olimpiad matematycznych na całym świecie. Część zadań została zaproponowana przez weteranów WLM, którzy, ukończywszy szkołę, chętnie zaangażowali się w organizację tego konkursu. Są to: Wojciech Wawrów (zadania 15, 54, 55, 57, 98), Jędrzej Garnek (42, 49, 79, 83), Sylwester Swat (75), Mieczysław Krawiarz (48) i Patryk Matusiak (13). Przedstawione tu rozwiązania pochodzą nie tylko od autorów zadań, lecz również z prac uczestników konkursu, rozmów z uczniami i studentami, sugestii koleżanek i kolegów po fachu oraz innych ludzi dobrej woli – wszystkim bardzo uprzejmie dziękuję!

Aktualne informacje na temat Wielkopolskiej Ligi Matematycznej można znaleźć na stronie *wlm.wmi.amu.edu.pl*.

Niniejszy zbiór zadań poświęcam pamięci Henryka Pawłowskiego, który zawsze wypowiadał się bardzo pozytywnie o zadaniach z WLM i kilka lat temu podsunął mi pomysł napisania takiej książeczki.

Bartłomiej Bzdega

Spis treści

I	Zadania	6
1	Liczby naturalne	7
1.1	Zapis dziesiętny	7
1.2	Liczby pierwsze	7
1.3	NWD i NWW	8
1.4	Równania diofantyczne	8
1.5	Tożsamości algebraiczne i podzielność	9
2	Analiza i algebra	10
2.1	Równania i układy równań	10
2.2	Nierówności	10
2.3	Ciągi	11
2.4	Funkcje	12
2.5	Wielomiany	12
3	Geometria	14
3.1	Rachunki na kątach	14
3.2	Rachunki na polach	15
3.3	Ważne punkty i linie w trójkącie	15
3.4	Równoległość	16
3.5	Nierówności w geometrii	16
4	Kombinatoryka	18
4.1	Zasada szufladkowa	18
4.2	Zagadnienia ekstremalne	18
4.3	Układanki	19
4.4	Grafy	19
4.5	Niezmienniki i półniezmienniki	20
5	Zadania z kosmosu	21

II	Rozwiązania	24
1	Liczby naturalne	25
1.1	Zapis dziesiętny	25
1.2	Liczby pierwsze	26
1.3	NWD i NWW	27
1.4	Równania diofantyczne	29
1.5	Tożsamości algebraiczne i podzielność	30
2	Analiza i algebra	32
2.1	Równania i układy równań	32
2.2	Nierówności	33
2.3	Ciągi	34
2.4	Funkcje	36
2.5	Wielomiany	38
3	Geometria	40
3.1	Rachunki na kątach	40
3.2	Rachunki na polach	43
3.3	Ważne punkty i linie w trójkącie	44
3.4	Równoległość	46
3.5	Nierówności w geometrii	48
4	Kombinatoryka	51
4.1	Zasada szufladkowa	51
4.2	Zagadnienia ekstremalne	51
4.3	Układanki	54
4.4	Grafy	56
4.5	Niezmienniki i półniezmienniki	57
5	Zadania z kosmosu	58

Część I

Zadania

Rozdział 1

Liczby naturalne

1.1 Zapis dziesiętny

Zadanie 1. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba naturalna mniejsza od iloczynu swoich cyfr w zapisie dziesiętnym.

Zadanie 2. Oznaczmy przez $s(k)$ sumę cyfr liczby naturalnej k w zapisie dziesiętnym. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 1$, które spełniają równość $s(11^n) = 2^n$.

Zadanie 3. Wykazać, że liczba

$$\underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{22 \dots 2}_n$$

jest iloczynem pewnych dwóch kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 4. Przez $s(n)$ oznaczmy sumę cyfr zapisu dziesiętnego liczby naturalnej n . Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość wyrażenia $s(2n)/s(n)$ dla $n \geq 1$.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze $p \notin \{2, 5\}$ o następującej własności: w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{1}{p}$ na p -tym miejscu po przecinku znajduje się cyfra zero.

1.2 Liczby pierwsze

Zadanie 6. Niech $p_1, p_2, \dots, p_n$ będą różnymi liczbami pierwszymi i niech

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{a}{p_1 p_2 \dots p_n}.$$

Udowodnić, że ułamek znajdujący się po prawej stronie tej równości jest nieskracalny.

Zadanie 7. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p + 8$ jest podzielna przez $\lfloor \sqrt{p} \rfloor$.

Zadanie 8. Niech $p_1, p_2, \dots, p_k$ będą różnymi liczbami pierwszymi, mniejszymi od pewnej liczby naturalnej n . Liczba n przy dzieleniu przez liczby $p_1, p_2, \dots, p_k$ daje niezerowe reszty, odpowiednio $r_1, r_2, \dots, r_k$. Połóżmy

$$p = \min\{p_1, p_2, \dots, p_k\} \quad \text{oraz} \quad r = \max\{r_1, r_2, \dots, r_k\}.$$

Dowieść, że $n^r > p^k$.

1.3 NWD i NWW

Zadanie 9. Różne liczby naturalne a, b, d spełniają warunki:

$$d = \text{NWD}(a, b) \quad \text{oraz} \quad d + 1 = \text{NWD}(a + 1, b + 1).$$

Udowodnić, że $d < \sqrt{|a - b|}$.

Zadanie 10. Liczby naturalne a i b są dzielnikami n . Wykazać, że jeśli liczba $\frac{n}{a} + \frac{n}{b}$ jest podzielna przez a i b , to liczba n jest podzielna przez liczbę

$$\text{NWW}(a, b)^2 / \text{NWD}(a, b).$$

Zadanie 11. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n , które mają dzielnik $d > 2$, spełniający warunek

$$\text{NWD}(n + 1, d - 2) > \sqrt{n + 1}.$$

Zadanie 12. Liczby naturalne $m \geq n \geq 2$ i $a_1, a_2, \dots, a_m$ spełniają warunki

$$1 < a_1 < a_2 < \dots < a_m < 2^n, \quad \text{NWD}(a_1, a_2, \dots, a_m) = 1.$$

Dowieść, że istnieją różne liczby $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, m\}$, dla których $\text{NWD}(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}) = 1$.

1.4 Równania diofantyczne

Zadanie 13. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba $4^n + 2^n + 17$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 14. Udowodnić, że równanie $a^a + b^b = c^c$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c .

Zadanie 15. Rozwiązać równanie $n! + 2 = m^3$ w liczbach całkowitych dodatnich m, n .

Zadanie 16. Rozwiązać równanie

$$a^{|b|+|c|} + b^{|c|+|a|} + c^{|a|+|b|} = -1$$

w liczbach całkowitych a, b, c , niebędących jednocześnie zerami.

Zadanie 17. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m i n , spełniające równość

$$m^{m^2} = (2n^2)^{n^2}.$$

1.5 Tożsamości algebraiczne i podzielność

Zadanie 18. Dane są liczby całkowite $a > b > 0$ oraz taka liczba pierwsza $p > 3$, że p^2 jest dzielnikiem liczby $a^3 - b^3$. Udowodnić, że $p < a\sqrt{3}$.

Zadanie 19. Liczby a, b, c są całkowite dodatnie, przy czym $a^2 + b^2 = c^2$. Dowieść, że liczba $c^2 + \frac{2}{3}ab$ jest całkowita i złożona.

Zadanie 20. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, e spełniają równości

$$a + b = c + d + e, \quad a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2.$$

Wykazać, że przynajmniej jedna z liczb a, b jest złożona.

Zadanie 21. Niech $a, k, l \geq 2$ będą liczbami naturalnymi oraz niech

$$M = 1 + a^k + a^{2k} + \dots + a^{(l-1)k}, \quad N = 1 + a^l + a^{2l} + \dots + a^{(k-1)l}.$$

Udowodnić, że $\text{NWD}(M, N) > 1$.

Zadanie 22. Niech $a \geq 2$ i $n \geq 1$ będą liczbami całkowitymi. Dowieść, że jeśli liczba $a^{2n} + a^n + 1$ jest pierwsza, to n jest potęgą trójki o wykładniku całkowitym nieujemnym.

Zadanie 23. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą, która nie jest dzielnikiem żadnej z liczb całkowitych a, b . Liczby $a^2 + b^2$ i $a^3 + b^3$ dają resztę 1 z dzielenia przez p . Dowieść, że liczba $a + b + 2$ dzieli się przez p .

Rozdział 2

Analiza i algebra

2.1 Równania i układy równań

Zadanie 24. Trzy różne liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunek

$$x^2 - y = y^2 - z = z^2 - x.$$

Udowodnić, że $(x + y)(y + z)(z + x) = 1$.

Zadanie 25. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} |x - y| &= z^7 \\ |y - z| &= x^7 \\ |z - x| &= y^7 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z .

2.2 Nierówności

Zadanie 26. Suma liczb dodatnich a, b, c jest równa 1. Dowieść, że

$$\sqrt{a - bc} + \sqrt{b - ca} + \sqrt{c - ab} \leq \sqrt{2},$$

o ile liczby występujące pod pierwiastkami są nieujemne.

Zadanie 27. Wykazać, że dla liczb dodatnich a, b, c , spełniających warunek $a + b + c = 1$, zachodzi nierówność

$$\frac{3a-1}{1-a^2} + \frac{3b-1}{1-b^2} + \frac{3c-1}{1-c^2} \geq 0.$$

Zadanie 28. Liczby $x_1, x_2, \dots, x_k$ są nieujemne. Niech $s_k = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Wykazać, że

$$\sqrt[n]{(s_1 + 1)(s_2 + 1) \dots (s_n + 1)} \leq (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1).$$

Zadanie 29. Liczby dodatnie a, b, c spełniają równość

$$a + b + c = 17 \quad \text{ i } \quad a \cdot b \cdot c = 64.$$

Dowieść, że $\max\{a, b, c\} \geq 8$.

Zadanie 30. W zależności od $n \geq 2$ wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą c o następującej własności:

Jeśli dowolne ciągi liczb rzeczywistych dodatnich $(x_1, \dots, x_n)$ i $(y_1, \dots, y_n)$ mają takie same wyrazy, choć niekoniecznie w tej samej kolejności, to

$$\frac{x_1}{y_1+y_2} + \frac{x_2}{y_2+y_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}+y_n} + \frac{x_n}{y_n+y_1} \geq c.$$

Zadanie 31. Wykazać, że dla liczb rzeczywistych $x, y, z \geq \frac{1}{2}$, spełniających warunek $xyz = 1$, zachodzi nierówność

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geq x + y + z + 3.$$

2.3 Ciągi

Zadanie 32. Udowodnić, że dla każdego naturalnego k istnieje taki ciąg arytmetyczny (a) i taki ciąg geometryczny (b) , że równość $a_m = b_n$ spełnia dokładnie k par (m, n) liczb całkowitych dodatnich.

Zadanie 33. Ciąg (a) liczb całkowitych dodatnich spełnia dla każdego n całkowitego dodatniego warunki:

$$a_{2n} = 3a_n - 1, \quad a_{2n+1} = 3a_n + 1.$$

Wykazać, że ten ciąg jest rosnący.

Zadanie 34. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ciąg (a) liczb nieujemnych, że dla wszystkich $n \geq 2$ zachodzą nierówności

$$a_{n+1} < a_n \quad \text{ oraz } \quad s_{n+1} > s_n,$$

przy czym s_n jest średnią arytmetyczną n początkowych wyrazów ciągu (a) .

Zadanie 35. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg liczb całkowitych dodatnich, w którym każda liczba całkowita dodatnia występuje dokładnie raz, a ponadto każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest dzielnikiem lub wielokrotnością poprzedniego wyrazu.

Zadanie 36. W ciągu $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{4n})$ występują liczby 1 i -1 , każda z nich po $2n$ razy. Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia

$$|a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \dots + a_{4n-2} a_{4n-1} a_{4n} + a_{4n-1} a_{4n} a_1 + a_{4n} a_1 a_2|.$$

Zadanie 37. Rozstrzygnąć, czy istnieje rosnący ciąg (a) liczb całkowitych dodatnich, który spełnia warunki

$$a_n \mid a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}, \quad a_n < a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

dla wszystkich $n \geq 4$.

Zadanie 38. Dla ustalonej liczby rzeczywistej $c > 0$ i liczby naturalnej $a_1 \geq 1$ określamy następujący ciąg (a) : dla $n > 1$ liczba a_n jest najmniejszą wielokrotnością liczby n , nie mniejszą niż ca_{n-1} .

Wyznaczyć wszystkie takie $c > 0$, że niezależnie od wartości a_1 , dla pewnego m zachodzi równość $a_m = m$.

2.4 Funkcje

Zadanie 39. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $xf(x) + f(-x) = 1$.

Zadanie 40. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y nierówność

$$|f(x) - f(y)| \cdot |x - y| \leq 1.$$

Dowieść, że f jest funkcją stałą.

Zadanie 41. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x zależność

$$f(x) = f(f(x)) + x.$$

Udowodnić, że funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

Zadanie 42. Funkcja $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ spełnia dla każdej liczby całkowitej dodatniej n równość

$$\underbrace{f(f(\dots f(n)\dots))}_n = n.$$

Wykazać, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n liczba $f(n)$ dzieli się przez n .

Zadanie 43. Funkcje $f, g: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ spełniają dla każdej liczby całkowitej dodatniej n następujące warunki:

$$g(n) = f(f(n)) = f(n+1), \quad f(n) \neq n+1.$$

Wykazać, że funkcja g jest okresowa.

2.5 Wielomiany

Zadanie 44. Wielomian $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ nazywamy *palindromicznym*, jeżeli $a_n \neq 0$ oraz $a_k = a_{n-k}$ dla $k = 0, 1, \dots, n$. Udowodnić, że iloczyn dwóch wielomianów palindromicznych jest także wielomianem palindromicznym.

Zadanie 45. Wykazać, że dla $n \geq 2$ wszystkie współczynniki wielomianu

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{1}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \dots \left(x + \frac{1}{n}\right)$$

są mniejsze od n .

Zadanie 46. Niech $P(x)$ będzie unormowanym wielomianem o współczynnikach rzeczywistych oraz niech $Q(x) = P(P(x))$. Udowodnić, że jeśli wielomian P ma pierwiastek rzeczywisty dodatni, to wielomian Q również ma pierwiastek rzeczywisty dodatni.

Zadanie 47. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których istnieje taki wielomian n -tego stopnia $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że wielomian $Q(x) = P(x^2 + 1)$ jest podzielny przez $P(x)$.

Zadanie 48. Dany jest wielomian $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych. Każda liczba całkowita dodatnia występuje w ciągu

$$P(1), P(2), P(3), P(4), \dots$$

przynajmniej raz. Udowodnić, że stopień wielomianu $P(x)$ jest równy 1.

Zadanie 49. Wyznaczyć wszystkie niestałe wielomiany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, spełniające następujący warunek:

Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n co najwyżej jedna z liczb

$$P(1), P(2), P(3), \dots, P(2n - 1)$$

dzieli się przez n .

Rozdział 3

Geometria

3.1 Rachunki na kątach

Zadanie 50. Dany jest trójkąt ABC . Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach BC i AD , przy czym spełnione są równości

$$|AC| = |BC| = |AD| \quad \text{oraz} \quad |BD| = |ED|.$$

Udowodnić, że $|\sphericalangle ABE| + 2|\sphericalangle DBE| = 90^\circ$.

Zadanie 51. Trójkąt ABC jest prostokątny. Punkt D jest spodkiem wysokości tego trójkąta, opuszczonej na przeciwprostokątną AB . Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AC i BC , przy czym $|CK| = |CL| = |CD|$. Proste AC i LD przecinają się w punkcie P , a proste BC i KD w punkcie Q . Dowieść, że $|AP| + |BQ| = |AB|$.

Zadanie 52. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są równości

$$|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle BDC|.$$

Udowodnić, że $|AB| = |BC|$.

Zadanie 53. Najkrótsza przekątna dziewięciokąta foremnego o boku a ma długość d . Udowodnić, że jego najdłuższa przekątna ma długość $a + d$.

Zadanie 54. Trójkąt ABC wpisany jest w okrąg o środku O i promieniu R . Proste AC i BC przecinają symetralną odcinka AB w punktach odpowiednio P i Q . Wykazać, że $R = \sqrt{|OP| \cdot |OQ|}$.

Zadanie 55. Przekątne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg o środku O przecinają się w punkcie P . Okręgi opisane na trójkątach ABP i CDP przecinają się w punkcie $E \neq P$, a okręgi opisane na trójkątach BCP i DAP – w punkcie $F \neq P$. Wykazać, że punkty E, F, O, P leżą na jednym okręgu.

3.2 Rachunki na polach

Zadanie 56. W czworokącie $ABCD$ kąty przy wierzchołkach B i C są proste. Punkt P leży na odcinku BC . Rozstrzygnąć, czy jest możliwe, by trójkąty ABP , CDP i DAP miały jednakowe pola.

Zadanie 57. Pięciokąt $ABCDE$ jest wypukły i spełnia warunki:

$$AB \parallel CE, \quad BC \parallel DA, \quad CD \parallel EB, \quad DE \parallel AC.$$

Wykazać, że $EA \parallel BD$.

Zadanie 58. Wysokość opuszczona na bok BC trójkąta ostrokątnego ABC ma długość równą średniej arytmetycznej długości jego wszystkich boków. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie i mają jednakowe promienie r . Ponadto okrąg o_1 jest styczny do odcinków AB i BC , natomiast okrąg o_2 jest styczny do odcinków BC i CA . Dowieść, że $|BC| = 5r$.

3.3 Ważne punkty i linie w trójkącie

Zadanie 59. Dany jest trójkąt ABC . Punkty P , Q , R leżą na odcinkach odpowiednio BC , CA , AB , przy czym AP jest dwusieczną kąta BAC oraz

$$|\sphericalangle BPR| = |\sphericalangle CPQ| = |\sphericalangle BAC|.$$

Wykazać, że trójkąty BPR i CPQ są przystające.

Zadanie 60. Czworokąt $ABCD$ spełnia warunek $|AB| = |BC| + |DA|$. Dwusieczne kątów ABC i DAB przecinają się w punkcie P . Udowodnić, że $|CP| = |DP|$.

Zadanie 61. Prosta ℓ przechodzi przez środek ciężkości trójkąta ABC oraz przecina odcinki AC i BC . Wykazać, że odległość punktu C od prostej ℓ jest równa sumie odległości punktów A i B od prostej ℓ .

Zadanie 62. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości

$$|\sphericalangle ABD| = 2|\sphericalangle ACD| \quad \text{ i } \quad |\sphericalangle ADB| = 2|\sphericalangle ACB|.$$

Wykazać, że prosta AC jest dwusieczną kąta BAD .

Zadanie 63. Dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i B trójkąta ABC przecinają odcinki BC i CA w punktach odpowiednio P i Q . Wykazać, że jeżeli symetralne odcinków AP i BQ przecinają się na odcinku AB , to $|AB|^2 = |BC| \cdot |CA|$.

Zadanie 64. W równoległoboku $ABCD$ kąt wewnętrzny przy wierzchołku A ma miarę $\alpha < 60^\circ$. Punkt $P \neq D$ spełnia warunek $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PCB| = \alpha$. Wykazać, że $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CPD|$.

Zadanie 65. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Wykazać, że na płaszczyźnie trójkąta ABC istnieje punkt P , dla którego zachodzą równości

$$|AB|^2 - |CP|^2 = |BC|^2 - |AP|^2 = |CA|^2 - |BP|^2.$$

3.4 Równoległość

Zadanie 66. Czworokąt $ABCD$ jest wypukły. Punkty P oraz Q są środkami odcinków odpowiednio CD i AB . Wykazać, że jeśli $AP \parallel CQ$ i $BP \parallel DQ$, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Zadanie 67. Odcinek AB jest dłuższą podstawą trapezu $ABCD$, w którym $|\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle CAD| = 180^\circ$. Udowodnić, że $|AB| \cdot |AD| = |BC| \cdot |CD|$.

Zadanie 68. Na boku AC trójkąta ABC wybrano punkt Q . Punkt P jest środkiem odcinka BC . Odcinki AP i BQ przecinają się w punkcie T . Punkt R jest środkiem odcinka AT , natomiast punkt S leży na odcinku BT i spełnia równość $|BS| = |QT|$. Dowieść, że $PS \parallel QR$.

3.5 Nierówności w geometrii

Zadanie 69. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta prostopadła do CI , przechodząca przez punkt I , przecina odcinki AC i BC w punktach odpowiednio P i Q . Wykazać, że $|AP| + |BQ| < |AB|$.

Zadanie 70. Punkt L jest środkiem boku CD czworokąta wypukłego $ABCD$. Dowieść, że jeśli trójkąt ABL jest równoboczny, to $|BC| + |DA| \geq |AB|\sqrt{3}$.

Zadanie 71. Na kole domkniętym o promieniu 1 znajduje się pchła. Wyznaczyć wszystkie liczby dodatnie d , dla których pchła potrafi dostać się z każdego punktu koła na każdy, wykonując pewną liczbę skoków o długości równej d i nie opuszczając przy tym koła.

Zadanie 72. Dany jest trójkąt ABC . Okrąg styczny do odcinków BC i AC przecina odcinek AB w punktach K i L . Wykazać, że

$$\left| |AK| - |BL| \right| \leq \left| |AC| - |BC| \right|.$$

Zadanie 73. Na płaszczyźnie leży $n \geq 3$ punktów. Wszystkie odcinki o końcach w tych punktach mają różne długości. Wypiszmy te długości w porządku malejącym: $d_1 > d_2 > d_3 > \dots$. Wykazać, że $d_1 \leq d_n + d_{n-1}$.

Zadanie 74. Na płaszczyźnie zaznaczono $n \geq 2$ punktów, żadne trzy nie leżą na jednej prostej oraz odległości pomiędzy każdymi dwoma z nich są różne. Odcinek, którego końcami są zaznaczone punkty nazwiemy *dziwnym*, jeżeli jeden z jego końców jest położony najbliżej drugiego ze wszystkich pozostałych zaznaczonych punktów, a drugi koniec jest położony najdalej od pierwszego ze wszystkich zaznaczonych punktów. W zależności od liczby n wyznaczyć największą możliwą liczbę dziwnych odcinków.

Zadanie 75. W trójkącie ostrokątnym ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę większą niż 45° . Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i AC , przy czym zachodzi równość $|AK| = |AL|$. Udowodnić, że

$$|AB|^2 + |AC|^2 < (|BL| + |CK|)^2.$$

Rozdział 4

Kombinatoryka

4.1 Zasada szufladkowa

Zadanie 76. Każdemu wierzchołkowi dwudziestościanu foremnego przypisano liczbę ze zbioru $\{0, 1, \dots, 6\}$. Na każdej ścianie zapisano sumę liczb przypisanych jej wierzchołkom. Udowodnić, że na pewnych dwóch ścianach zapisano taką samą liczbę.

Zadanie 77. Mamy 60 żetonów, każdy o wartości 2, 3, 4, 5 lub 6 złotych. Wykazać, że można wypłacić tymi żetonami kwotę 60 złotych, bez konieczności rozmienniania.

4.2 Zagadnienia ekstremalne

Zadanie 78. Wybrano k takich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, że każde dwa z nich mają co najwyżej jeden element wspólny. W zależności od liczby naturalnej $n \geq 2$ wyznaczyć największą możliwą wartość k .

Zadanie 79. Ustalmy liczbę naturalną n . Niech A oznacza zbiór punktów (x, y) płaszczyzny, różnych od $O = (0, 0)$, o współrzędnych x i y całkowitych, spełniających warunki $|x| \leq n$ i $|y| \leq n$. W zależności od n znaleźć najmniejszą taką liczbę naturalną m , że każdy m -elementowy podzbiór zbioru A zawiera punkty P i Q , dla których kąt POQ jest prosty.

Zadanie 80. W zależności od $n \geq 2$ wyznaczyć największą możliwą liczbę szachowych wież, którą można w taki sposób ustawić na szachownicy o wymiarach $n \times n$, by spełniony był następujący warunek:
Każda wieża, która jest szachowana przez dwie inne, stoi razem z nimi na jednej linii.

Zadanie 81. Ustalmy liczbę naturalną $n \geq 1$. Permutacje $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ciągu $(1, 2, \dots, n)$ nazwiemy *podobnymi*, jeśli $a_i = b_i$ dla przynajmniej jednego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. W zależności od n wyznaczyć największą liczbę k , dla której istnieje k różnych permutacji ciągu $(1, 2, \dots, n)$, z których każde dwie są podobne.

Zadanie 82. Wybrano k podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, przy czym $k < 2^n$. Dla każdych dwóch wybranych podzbiorów A i B , podzbiory $A \cup B$ i $A \setminus B$ również są wybrane. W zależności od n wyznaczyć największą liczbę k , dla której powyższa sytuacja jest możliwa.

Zadanie 83. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią, $A \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ i $|A| = k$. W zależności od n wyznaczyć największą liczbę k , dla której jest możliwe, by każdy podzbiór zbioru A miał sumę elementów różną od k .

4.3 Układanki

Zadanie 84. Z kostek domina o wymiarach 2×1 ułożono kwadrat. Udowodnić, że z pewnych dwóch kostek ułożony jest kwadrat o wymiarach 2×2 .

Zadanie 85. Nazwijmy *grubym* prostokąt o bokach x i y , spełniających warunków $\frac{1}{2}x < y < 2x$. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których z kafelków o wymiarach

$$1 \times 1, \quad 1 \times 2, \quad \dots, \quad 1 \times n$$

można ułożyć gruby prostokąt, przy czym każdy z tych kafelków musi być użyty dokładnie jeden raz.

Zadanie 86. Kwadrat o wymiarach $n \times n$ podzielono na n^2 kwadratów jednostkowych. Każdy odcinek będący bokiem któregośkolwiek z kwadratów 1×1 pomalowano na biało lub czarno, przy czym każdy kwadrat jednostkowy ma dokładnie dwa boki białe i dwa czarne. Udowodnić, że liczba białych odcinków jednostkowych na brzegu kwadratu $n \times n$ jest parzysta.

Zadanie 87. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Trójkąt równoboczny o boku n podzielono na t trójkątów równobocznych o boku 1 oraz pewną liczbę rombów o boku 1 i kącie ostrym 60° . Udowodnić, że $t \geq n$.

4.4 Grafy

Zadanie 88. W pewnym kraju każde dwa spośród $n \geq 3$ miast są połączone drogą jednokierunkową, ale z każdego miasta można dojechać do dowolnego innego, choć niekoniecznie bezpośrednio. Nazwijmy trójkątem takie trzy miasta A, B, C , że istnieją bezpośrednie drogi z A do B , z B do C i z C do A . Wykazać, że każde miasto należy do pewnego trójkąta.

Zadanie 89. W turnieju szachowym każdy gracz rozegrał z każdym partię, zakończoną wygraną, przegraną bądź remisem. Dla każdej trójki graczy A, B, C , jeśli A wygrał z B i B wygrał z C , to C wygrał z A . Dowieść, że jeśli gracz A_i wygrał z A_{i+1} dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ oraz gracz A_n wygrał z A_1 , to n jest liczbą podzielną przez 3.

Zadanie 90. Na obóz wyjechało $n \geq 3$ uczniów, niektórzy z nich znali się jeszcze przed wyjazdem. Podczas obozu codziennie odbywał się wieczorek integracyjny, na którym zaznajamiała się każda para uczestników, która posiadała wspólnego znajomego, poznanego najpóźniej w dniu poprzednim. Obóz zakończono z chwilą, w której każdy już poznał każdego. W zależności od n wyznaczyć największą, skończoną liczbę dni, które mógł trwać obóz.

4.5 Niezmienniki i półniezmienniki

Zadanie 91. Na tablicy napisano $n \geq 1$ liczb całkowitych dodatnich, mniejszych od $2n$ i niekoniecznie różnych. Następnie, dopóki było to możliwe, wykonywano operację polegającą na zmazaniu dwóch zapisanych liczb $a, b > 1$ i dopisaniu liczby $\lfloor ab/(a+b) \rfloor$. Wykazać, że na tablicy pozostała przynajmniej jedna jedynka.

Zadanie 92. Płasczyznę podzielono na trójkąty równoboczne w ten sposób, że w każdym wierzchołku – będziemy dalej nazywać je węzłami – spotyka się sześć trójkątów. W każdym węźle znajduje się lampka, natomiast na każdym trójkącie jest włącznik, który zmienia stan lampek znajdujących się w węzłach będących wierzchołkami tego trójkąta: zgaszone zapalają się, a świeące gasną. Rozstrzygnąć, czy zaczynając od sytuacji, w której wszystkie lampki są zgaszone, możemy doprowadzić to tego, by świeciła się dokładnie jedna lampka.

Rozdział 5

Zadania z kosmosu

Zadanie 93. Każdy z 2^n podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ wypisano na jednej z n kart ponumerowanych od 1 do n . Dowieść, że dla pewnego k na k -tej karcie znajduje się zbiór zawierający k oraz zbiór, który nie zawiera k .

Zadanie 94. Ustalmy liczbę rzeczywistą $a > 1$. Niech $d(k)$ oznacza liczbę dzielników liczby naturalnej k . Dowieść, że

$$\frac{d(1)}{a^1} + \frac{d(2)}{a^2} + \dots + \frac{d(n)}{a^n} < \frac{1}{a^1-1} + \frac{1}{a^2-1} + \dots + \frac{1}{a^n-1}$$

dla wszystkich naturalnych $n \geq 1$.

Zadanie 95. Ciąg (a) zdefiniowany jest następująco:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad \text{oraz} \quad a_{k+1} = \frac{1}{1+a_k-a_k^2} \quad \text{dla } k \geq 1.$$

Dowieść, że $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n < \frac{1}{\sqrt{2n}}$ dla wszystkich $n \geq 1$.

Zadanie 96. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ zachodzą równości:

$$|AB| = |BC| = |CD|, \quad |AE| = |EB| = |BD|, \quad |AC| = |CE| = |ED|.$$

Wyznaczyć miary kątów tego pięciokąta.

Zadanie 97. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi, przy czym $0 \leq x_i \leq 1$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Połóżmy $x_0 = x_n$ i $x_{n+1} = x_1$ oraz

$$y_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \cdot \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Dowieść, że $8\bar{y} + 4 \geq 11\bar{x}$.

Zadanie 98. Funkcja $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla każdego $x > 0$ równość

$$f(x)^2 = 1 + (x-1)f(x+1).$$

Dowieść, że jeśli $f(x) > 0$ dla każdego $x \geq 1$, to $f(x) \geq x$ dla każdego $x \geq 1$.

Zadanie 99. Działanie $\star$ przyporządkowuje każdej parze uporządkowanej (x, y) elementów pewnego zbioru n -elementowego A pewien element $x \star y \in A$. Dla wszystkich $x, y \in A$ zachodzi równość

$$(x \star y) \star (y \star x) = (y \star x) \star (x \star y).$$

Dowieść, że istnieje przynajmniej $n^{7/3}$ uporządkowanych czwórek (a, b, c, d) elementów zbioru A , dla których jednocześnie zachodzą równości

$$a \star b = c \star d \quad \text{ i } \quad b \star a = d \star c.$$

Zadanie 100. Niech A będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n przez A_n oznaczmy zbiór tych liczb, które da się zapisać w postaci sumy $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, w której $a_1, \dots, a_n \in A$ są niekoniecznie różne. Niech $r_n = |A_{n+1}| - |A_n|$. Dowieść, że ciąg (r) jest od pewnego miejsca stały.

Część II

Rozwiązania

Rozdział 1

Liczby naturalne

1.1 Zapis dziesiętny

Rozwiązanie zadania 1. Oznaczmy przez I iloczyn cyfr dowolnie wybranej liczby naturalnej n , przez k liczbę jej cyfr, a przez a jej pierwszą cyfrę. Wtedy zachodzą nierówności

$$I \leq a \cdot 9^{k-1} \leq a \cdot 10^{k-1} \leq n.$$

To dowodzi, że nie istnieje liczba naturalna większa od iloczynu swoich cyfr.

Rozwiązanie zadania 2. Równość $s(11^n) = 2^n$ zachodzi dla $n \leq 4$. Zastosujemy indukcję, aby wykazać, że $s(11^n) < 2^n$ dla $n \geq 5$. Skorzystamy z nierówności

$$s(a + b) \leq s(a) + s(b),$$

której uzasadnienie tkwi w algorytmie dodawania pisemnego. Dla $n = 5$ mamy $S(11^5) < 2^5$. Przypuśćmy, że $s(11^k) < 2^k$ dla pewnego $k \geq 5$. Wówczas

$$\begin{aligned} s(11^{k+1}) &= s(11 \cdot 11^k) = s(10 \cdot 11^k + 11^k) \\ &\leq s(10 \cdot 11^k) + s(11^k) = 2s(11^k) < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny. Szukanymi liczbami są zatem 1, 2, 3 i 4.

Rozwiązanie zadania 3. Zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned} \underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{22 \dots 2}_n &= \underbrace{1111 \dots 11}_{2n} + \underbrace{11 \dots 1}_n = \frac{10^{2n}-1}{9} + \frac{10^n-1}{9} = \frac{(10^n-1)(10^n+2)}{9} \\ &= \frac{10^n-1}{3} \cdot \frac{10^n+2}{3} = \underbrace{33 \dots 3}_n \cdot \underbrace{33 \dots 34}_{n-1}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie zadania 4. Niech c_i oznacza liczbę cyfr i w zapisie dziesiętnym liczby n . Jest jasne, że

$$s(n) = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + 6c_6 + 7c_7 + 8c_8 + 9c_9.$$

Niech $n = \overline{\dots a_2 a_1 a_0}$ oraz $2n = \overline{\dots b_2 b_1 b_0}$ będą zapisami dziesiętnymi. Wówczas

$$b_j = \begin{cases} r_j + 2a_j & \text{gd}y \ a_j < 5 \\ r_j + 2a_j - 10 & \text{gd}y \ a_j \geq 5, \end{cases}$$

przy czym

$$r_j = \begin{cases} 1 & \text{gd}y \ j \geq 1 \text{ i } a_{j-1} \geq 5 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Z tego wynika, że

$$s(2n) = 2c_1 + 4c_2 + 6c_3 + 8c_4 + c_5 + 3c_6 + 5c_7 + 7c_8 + 9c_9.$$

W takim razie $2s(n) \geq s(2n)$ oraz $5s(2n) \geq s(n)$. Otrzymujemy zatem

$$\frac{1}{5} \leq s(2n)/s(n) \leq 2.$$

Wartości te są osiągalne – równości zachodzą przykładowo dla $n = 5$ i $n = 1$.

Rozwiązanie zadania 5. Na mocy małego twierdzenia Fermata zachodzi podzielność $p \mid 10^{p-1} - 1$. Niech $\overline{a_{p-1} \dots a_1 a_0}$ będzie zapisem dziesiętnym liczby $\frac{10^p - 1}{p}$, w którym dopuszczamy zera początkowe.

Rozważmy liczbę $x = \overline{0, (a_{p-1} \dots a_1 a_0)}$. Wówczas

$$\begin{aligned} 10^p \cdot x - x &= \overline{a_{p-1} \dots a_1 a_0, (a_{p-1} \dots a_1 a_0)} - \overline{0, (a_{p-1} \dots a_1 a_0)} \\ &= \overline{a_{p-1} \dots a_1 a_0} = \frac{10^p - 1}{p}, \end{aligned}$$

więc $x = \frac{1}{p}$. To oznacza, że p -ta cyfra rozwinięcia dziesiętnego $\frac{1}{p}$ jest taka sama jak pierwsza, czyli równa zero dla $p > 10$ i różna od zera dla $p \in \{3, 7\}$.

1.2 Liczby pierwsze

Rozwiązanie zadania 6. Liczby $p_1, p_2, \dots, p_n$ są pierwsze, więc wystarczy wykazać, że liczba a nie jest podzielna przez żadną z nich. Niech

$$a_i = \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{p_i} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Wtedy $\frac{1}{p_i} = \frac{a_i}{p_1 p_2 \dots p_n}$, zatem $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{p_1 p_2 \dots p_n}$.

Stąd wnioskujemy, że $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Pozostaje zauważyć, że $p_i \mid a_j$ dla $j \neq i$, ale $p_i \nmid a_i$. Wobec tego $p_i \nmid a$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Rozwiązanie zadania 7. Przyjmijmy $n = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$ i załóżmy na razie, że $p > 16$. Wtedy $n \geq 4$, ponadto liczba n jest nieparzysta jako dzielnik liczby nieparzystej $p + 8$. Niech $p = n^2 + kn - 8$ dla pewnego całkowitego $k > 0$. Liczba k jest parzysta, gdyż dla k nieparzystych liczba p byłaby parzysta. Ponadto $k \neq 2$, ponieważ $n^2 + 2n - 8 = (n - 2)(n + 4)$ jest liczbą złożoną dla $n \geq 4$. Z tego wynika, że $k \geq 4$. Z nierówności $p < n^2 + 2n$ otrzymujemy

$$4 \leq n < \frac{8}{k-2} \leq \frac{8}{4-2} = 4,$$

co jest sprzecznością. Wykluczaliśmy zatem przypadek $p > 16$. Bezpośrednio sprawdzamy, że warunki zadania spełniają liczby 2, 3 i 13.

Rozwiązanie zadania 8. Liczba n daje przy dzieleniu przez każdą z liczb $p_1, p_2, \dots, p_k$ resztę w zbiorze $\{1, 2, \dots, r\}$, więc dla przynajmniej $t = \lceil k/r \rceil$ z nich jest to ta sama reszta. Bez straty ogólności można zatem założyć, że liczby $p_1, p_2, \dots, p_t$ dają tę samą resztę r_1 z dzielenia przez n .

Liczba $n - r_1$ jest podzielna przez $p_1, p_2, \dots, p_t$. Są to różne liczby pierwsze, zatem ich iloczyn również dzieli $n - r_1$. Ponadto $n - r_1 > n - p_1 > 0$, więc

$$n > n - r_1 \geq p_1 p_2 \dots p_k \geq p^t = p^{\lceil k/r \rceil} \geq p^{k/r}.$$

Podnosząc obustronnie powyższą nierówność do potęgi r , otrzymujemy tezę.

1.3 NWD i NWW

Rozwiązanie zadania 9. Liczba $a - b = (a + 1) - (b + 1)$ jest podzielna zarówno przez d jak i przez $d + 1$. Ponieważ d i $d + 1$ są względnie pierwsze, mamy $d(d + 1) \mid a - b$. Z tej podzielności, wobec nierówności $|a - b| > 0$, otrzymujemy $|a - b| \geq d(d + 1) > d^2$, co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania 10. Ponieważ $a \mid \frac{n}{a} + \frac{n}{b}$, to tym bardziej $a \mid \frac{nb}{a} + n$. Wobec tego $a \mid \frac{nb}{a}$, równoważnie $a^3 \mid abn$. Analogicznie otrzymujemy podzielność $b^3 \mid abn$. Z tego wynika, że liczba n jest podzielna przez

$$\frac{\text{NWW}(a^3, b^3)}{ab} = \frac{\text{NWW}(a, b)^3}{\text{NWD}(a, b) \cdot \text{NWW}(a, b)} = \frac{\text{NWW}(a, b)^2}{\text{NWD}(a, b)},$$

co kończy dowód.

Drugie rozwiązanie zadania 10. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz

$$p^\alpha \mid a, \quad p^\beta \mid b, \quad p^k \mid n,$$

przy czym α, β i k są największymi liczbami całkowitymi, dla których zachodzą te podzielności. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $\alpha \leq \beta$; oczywiście $\beta \leq k$. Dla pewnych liczb naturalnych x i y , które nie są podzielne przez p ,

mamy

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{b} = p^{k-\alpha}x + p^{k-\beta}y.$$

Ta liczba jest podzielna przez b , czyli również przez p^β . Stąd $k \geq 2\beta$ lub $\alpha = \beta$. W obu przypadkach $k \geq 2\beta - \alpha$. Pozostaje zauważyć, że liczba p występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $\text{NWD}(a, b)^2 / \text{NWD}(a, b)$ z wykładnikiem $2\beta - \alpha$, co wobec dowolności p kończy dowód.

Rozwiązanie zadania 11. Niech $a = \text{NWD}(n+1, d-2)$ oraz $n = dm$. Z nierówności $d > d-2 \geq a > \sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ wnioskujemy, że $m = \frac{n}{d} < \sqrt{n}$ oraz $d(d-2) > n = md$, więc $d-2 > m$, czyli $d \geq m+3$.

Liczba $n+1-m(d-2) = 2m+1$ dzieli się przez a , więc $2m+1 \geq a > \sqrt{n+1}$. Po podniesieniu obustronnie do kwadratu otrzymamy

$$4m^2 + 4m + 1 > n + 1 = md + 1,$$

z czego wynika, że $d \leq 4m+3$. Co więcej, liczba a jest również dzielnikiem liczby $2m+1-(d-2) = 2m-d+3$, przy czym wobec wcześniej wykazanych oszacowań zachodzą nierówności

$$-2a < -2\sqrt{n} < -2m \leq 2m-d+3 \leq m < \sqrt{n} < a.$$

W takim razie $d = a+2m+3$ lub $d = 2m+3$.

W pierwszym przypadku $a+2m+3 = d \leq 4m+3$, więc $a \leq 2m$, ale to prowadzi do sprzeczności

$$n = dm = (a+2m+3)m > a^2 > n+1.$$

Pozostało $d = 2m+3$, wtedy $n = m(2m+3)$. Należy jeszcze sprawdzić, że

$$\text{NWD}(n+1, d-2) = 2m+1 > \sqrt{n+1}.$$

Wobec tego szukane liczby są postaci $n = m(2m+3)$, w której m jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią.

Rozwiązanie zadania 12. Niech $\text{NWD}(X)$ oznacza największy wspólny dzielnik elementów zbioru X . Spośród wszystkich niepustych podzbiorów X zbioru $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, dla których $\text{NWD}(X) = 1$, wybieramy taki, który ma najmniej elementów. Bez utraty ogólności niech będzie to $B = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Wystarczy wykazać, że $k \leq n$, bo wówczas $\text{NWD}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$.

Z minimalności zbioru B wnioskujemy, że dla $i = 1, 2, \dots, k$ zachodzi nierówność $\text{NWD}(B \setminus \{a_i\}) > 1$, więc istnieje taka liczba pierwsza p_i , że $p_i \nmid a_i$ oraz $p_i \mid a_j$ dla $j \neq i$. Liczby $p_1, p_2, \dots, p_k$ są parami różne, więc $p_1 p_2 \dots p_{k-1} \mid a_k$, co daje

$$2^n > a_k \geq p_1 p_2 \dots p_{k-1} \geq 2^{k-1}.$$

Z powyższej nierówności wynika, że $k \leq n$.

1.4 Równania diofantyczne

Rozwiązanie zadania 13. Dla każdego naturalnego $n \geq 5$ mamy

$$(2^n)^2 = 4^n < 4^n + 2^n + 17 < 4^n + 2 \cdot 2^n + 1 = (2^n + 1)^2,$$

więc dla takich n liczba $4^n + 2^n + 17$ nie jest kwadratem liczby naturalnej. Spośród liczb naturalnych $n \leq 4$ postawiony w zadaniu warunek spełnia tylko $n = 4$ – wówczas $4^n + 2^n + 17 = 17^2$.

Rozwiązanie zadania 14. Gdyby takie liczby a, b, c istniały, to oczywiście byłoby $c > 1$ oraz $a, b \leq c - 1$. Ale wtedy

$$a^a + b^b \leq 2(c - 1)^{c-1} < 2c^{c-1} \leq c^c,$$

co jest sprzeczne z wyjściowym równaniem.

Rozwiązanie zadania 15. Liczba m^3 dzieli się przez 8 dla m parzystych, a dla m nieparzystych liczba ta jest nieparzysta. Jeżeli $n \geq 4$, to

$$n! + 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n + 2$$

jest liczbą parzystą niepodzielną przez 8, wobec tego nie może być sześcianem liczby naturalnej. W takim razie $n \leq 3$. Po bezpośrednim sprawdzeniu okazuje się, że rozwiązanie całkowitoliczbowe daje tylko $n = 3$ i mamy wtedy $m = 2$.

Rozwiązanie zadania 16. Jeżeli $b = c = 0$, to otrzymujemy równanie sprzeczne $a^0 = -1$; analogicznie gdy którekolwiek dwie z niewiadomych są zerami. Wobec tego co najwyżej jedna z liczb a, b, c jest równa 0, więc wykładniki z lewej strony równości są dodatnie. Z tego wynika, że liczba $a + b + c$ jest tej samej parzystości co -1 , czyli wśród liczb a, b, c są trzy lub jedna liczba nieparzysta.

Nie mogą być trzy nieparzyste, bo wówczas lewa strona równości byłaby nieujemna jako suma trzech potęg o wykładnikach parzystych. A zatem dokładnie dwie z niewiadomych są parzyste – bez straty ogólności niech będą to a i b . Liczba $c^{|a|+|b|}$ daje resztę 1 z dzielenia przez 4 jako potęgą liczby nieparzystej o wykładniku parzystym. Z tego wynika, że $4 \nmid a^{|b|+|c|} + b^{|c|+|a|}$, więc $|b| + |c| = 1$ lub $|c| + |a| = 1$. W pierwszym przypadku (drugi jest analogiczny) mamy $b = 0$ i $c = \pm 1$, więc $c^{|a|+|b|} = 1$. Prowadzi to do równości $a = -2$.

Po uwzględnieniu wszystkich analogicznych przypadków, łącznie otrzymujemy 12 rozwiązań: trójki

$$(a, b, c) = (-2, 0, \pm 1)$$

i wszystkie ich permutacje.

Rozwiązanie zadania 17. Funkcja $f(x) = x^{x^2}$ jest ściśle rosnąca w przedziale $[1, \infty)$. Ponadto

$$f(x\sqrt{2}) = (x\sqrt{2})^{(x\sqrt{2})^2} = (x\sqrt{2})^{2x^2} = (2x^2)^{x^2}.$$

Równanie z zadania przyjmuje więc postać $f(m) = f(n\sqrt{2})$, co jest równoważne $m = n\sqrt{2}$. Jest to jednak niemożliwe, gdyż $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Wobec tego szukane liczby nie istnieją.

1.5 Tożsamości algebraiczne i podzielność

Rozwiązanie zadania 18. Liczba $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ jest podzielna przez p^2 . Jeśli $p \mid a - b$, to

$$p \leq a - b < a < a\sqrt{3}.$$

W przeciwnym razie $p^2 \mid a^2 + ab + b^2$, więc

$$p^2 \leq a^2 + ab + b^2 < 3a^2,$$

czyli $p < a\sqrt{3}$.

Rozwiązanie zadania 19. Kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 3, więc albo wszystkie trzy liczby a, b, c są podzielne przez 3, albo dokładnie jedna z liczb a, b jest podzielna przez 3. Z tego wynika, że $c^2 + \frac{2}{3}ab$ jest liczbą całkowitą. Ponadto

$$3(c^2 + \frac{2}{3}ab) = 3c^2 + 2ab = 4c^2 - (a-b)^2 = (2c - a + b)(2c + a - b).$$

Aby dowieść, że liczba $c^2 + \frac{2}{3}ab$ jest złożona, wystarczy jeszcze zauważyć, że $2c + a - b = (c - b) + c + a > c > 3$, analogicznie $2c - a + b > 3$.

Rozwiązanie zadania 20. Zachodzi równość

$$(a+b)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = (c+d+e)^2 - (d^2 + e^2),$$

która po uporządkowaniu przybiera postać

$$ab = c^2 + cd + ce + de = (c+d)(c+e).$$

Liczby $c+d$ i $c+e$ są większe od 1, więc jeśli jedna z liczb a, b jest równa 1, to druga jest złożona. Gdyby liczby a i b były pierwsze, to na mocy jednoznaczności rozkładu zachodziłyby równości $a = c+d$ oraz $b = c+e$, lub na odwrót. To jednak prowadzi do sprzeczności

$$a+b = c+d+c+e > c+d+e = a+b.$$

Wobec tego co najmniej jedna z liczb a, b jest złożona.

Rozwiązanie zadania 21. Zauważmy, że $M(a^k - 1) = N(a^l - 1) = a^{kl} - 1$, więc $\text{NWW}(M, N) \leq a^{kl} - 1$. Stąd

$$\text{NWD}(M, N) = \frac{MN}{\text{NWW}(M, N)} \geq \frac{MN}{a^{kl} - 1} = \frac{a^{kl} - 1}{(a^k - 1)(a^l - 1)} > \frac{a^{kl} - 1}{a^{k+l} - 1} \geq 1,$$

co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania 22. Wykażemy, że jeśli n nie jest potęgą trójki, to liczba $a^{2n} + a^n + 1$ jest złożona. Mamy wtedy $n = 3^k \cdot m$, przy czym $3 \nmid m$ oraz $m > 1$. Wobec tego $a^n = b^m$ dla $b = a^{3^k} > 1$. Zauważmy, że

$$a^{2n} + a^n + 1 = b^{2m} + b^m + 1 = b^{m-1}(b^2 + b + 1) + (b^{m+1} - 1)(b^{m-1} - 1).$$

Jedna z liczb $m+1$, $m-1$ jest podzielna przez 3, więc jedna z liczb $b^{m-1} - 1$, $b^{m+1} - 1$ dzieli się przez $b^3 - 1 = (b-1)(b^2 + b + 1)$. Wnioskujemy zatem, że liczba $b^{2m} + b^m + 1$ jest podzielna przez $b^2 + b + 1$. Jest to dzielnik różny od 1 i $b^{2m} + b^m + 1$, więc $b^{2m} + b^m + 1 = a^{2n} + a^n + 1$ jest liczbą złożoną.

Drugie rozwiązanie zadania 22. Wykorzystamy własności wielomianów podziału koła $\Phi_d(x)$, które definiujemy następująco:

$$\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1 \quad \text{dla wszystkich } n \geq 1.$$

Są to wielomiany o współczynnikach całkowitych, ponadto $\Phi_n(a) > 1$ dla naturalnych $a, n \geq 2$. Mamy więc

$$a^{2n} + a^n + 1 = \frac{a^{3n} - 1}{a^n - 1} = \prod_{d|3n \text{ i } d \nmid n} \Phi_d(a).$$

Jeśli n nie jest potęgą trójki, to dzieli się przez pewną liczbę pierwszą $p \neq 3$. Wówczas w powyższym iloczynie występują co najmniej dwa czynniki większe niż 1: $\Phi_{3n}(a)$ i $\Phi_{3n/p}(a)$. Wtedy liczba $a^{2n} + a^n + 1$ jest złożona.

Rozwiązanie zadania 23. Mamy $(a^3 + b^3)^2 \equiv 1 \equiv (a^2 + b^2)^3 \pmod{p}$, co po uproszczeniu daje

$$2a^3b^3 \equiv 3a^2b^2(a^2 + b^2) \equiv 3a^2b^2 \pmod{p}.$$

Ponieważ a i b są względnie pierwsze z p , kongruencję można podzielić obustronnie przez a^2b^2 . Otrzymujemy $2ab \equiv 3 \pmod{p}$. W takim razie

$$2 \equiv 2(a^3 + b^3) = (a+b)(2(a^2 + b^2) - 2ab) \equiv (a+b)(2-3) \equiv -(a+b) \pmod{p},$$

co jest równoważne tezie.

Rozdział 2

Analiza i algebra

2.1 Równania i układy równań

Rozwiązanie zadania 24. Przekształcając równość $x^2 - y = y^2 - z$, otrzymujemy

$$(x + y)(x - y) = y - z.$$

Analogicznie

$$(y + z)(y - z) = z - x \quad \text{oraz} \quad (z + x)(z - x) = x - y.$$

Mnożąc te trzy równości stronami, otrzymamy

$$(x + y)(x - y)(y + z)(y - z)(z + x)(z - x) = (y - z)(z - x)(x - y),$$

co po obustronnym podzieleniu przez $(x - y)(y - z)(z - x) \neq 0$ daje tezę.

Rozwiązanie zadania 25. Zauważmy, że $z^7 = |x - y| \geq 0$, co daje $z \geq 0$; analogicznie $x \geq 0$ i $y \geq 0$. Rozważmy przypadek, w którym x jest najmniejszą z liczb x, y, z . Zachodzi wówczas równość

$$y^7 - z^7 = |z - x| - |x - y| = (z - x) - (y - x) = z - y,$$

co prowadzi do $y = z$, gdyż w przeciwnym razie końce równości miałyby różne znaki. Wtedy $x = 0$ oraz $z^7 = z$, więc $y = z \in \{0, 1\}$.

Przypadki, w których y lub z jest najmniejszą z liczb x, y, z są analogiczne. Otrzymaliśmy następujące cztery trójki (x, y, z) :

$$(0, 0, 0), \quad (1, 1, 0), \quad (1, 0, 1), \quad (0, 1, 1).$$

Sprawdzamy, że każda z nich spełnia układ.

2.2 Nierówności

Rozwiązanie zadania 26. Skorzystamy z nierówności $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, prawdziwej dla liczb nieujemnych x i y . Otrzymujemy z niej

$$\frac{\sqrt{a-bc} + \sqrt{b-ca}}{2} \leq \sqrt{\frac{a-bc+b-ca}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b)(1-c)}{2}} = \frac{a+b}{\sqrt{2}},$$

gdyż $1-c = a+b$ na mocy warunków zadania. Sumując tę nierówność z dwiema analogicznymi, otrzymamy

$$\sqrt{a-bc} + \sqrt{b-ca} + \sqrt{c-ab} \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}} + \frac{b+c}{\sqrt{2}} + \frac{c+a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

gdyż $a+b+c=1$.

Rozwiązanie zadania 27. Na mocy łatwej do udowodnienia nierówności $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \frac{2}{x+y}$, prawdziwej dla wszystkich $x, y > 0$, otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} \right) \geq \frac{2}{2-a-b} = \frac{2}{1+c}$$

oraz dwie nierówności analogiczne. Sumując te nierówności stronami, dostajemy

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

Dla $a \neq \pm 1$ mamy $\frac{1}{1-a} - \frac{2}{1+a} = \frac{3a-1}{1-a^2}$, analogicznie dla b i c , więc dowód jest zakończony.

Rozwiązanie zadania 28. Niech $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Jest jasne, że $s_k + 1 \leq M + 1$ dla $k = 1, 2, \dots, n$, więc

$$\sqrt[n]{(s_1+1) \dots (s_n+1)} \leq \sqrt[n]{(M+1)^n} = M+1 \leq (x_1+1) \dots (x_n+1).$$

Ostatnia nierówność zachodzi, ponieważ liczby $x_1+1, \dots, x_n+1$ są nie mniejsze od 1, a jedną z nich jest $M+1$.

Rozwiązanie zadania 29. Przypuśćmy, że $a, b, c < 8$. Zachodzą wówczas nierówności

$$\begin{aligned} 0 &< c(8-a)(8-b) = 64c - 8c(a+b)c + abc \\ &= 64c - 8c(17-c) + 64 = 8(c-1)(c-8) < 0, \end{aligned}$$

gdyż $1 < c < 8$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że przynajmniej jedna z liczb a, b, c jest większa lub równa 8.

Rozwiązanie zadania 30. Udowodnimy, że niezależnie od n mamy $c = 1$. Jest jasne, że

$$\frac{x_1}{y_1+y_2} + \dots + \frac{x_n}{y_n+y_1} \geq \frac{x_1}{y_1+\dots+y_n} + \dots + \frac{x_n}{y_1+\dots+y_n} = \frac{x_1+\dots+x_n}{y_1+\dots+y_n} = 1.$$

Rozważmy teraz $x_k = y_k = a^k$ dla $k = 1, \dots, n$, przy czym $a = n/\varepsilon$ zaś $\varepsilon > 0$ jest bardzo małe. Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{y_1+y_2} + \dots + \frac{x_n}{y_n+y_1} &= \frac{a}{a+a^2} + \frac{a^2}{a^2+a^3} + \dots + \frac{a^{n-1}}{a^{n-1}+a^n} + \frac{a^n}{a^n+a} \\ &= \frac{n-1}{a+1} + \frac{a^n}{a^n+a} < \frac{n}{a} + 1 = 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Liczba ta może być dowolnie bliska 1.

Rozwiązanie zadania 31. Na mocy warunku $xyz = 1$, zadana nierówność jest równoważna nierówności

$$4(yz + zx + xy) \geq 2(x + y + z) + 8xyz - x^2y^2z^2 - 1,$$

a po przekształceniach

$$x^2y^2z^2 \geq (2x-1)(2y-1)(2z-1).$$

Wykazujemy ją, mnożąc stronami oczywiste nierówności

$$x^2 \geq 2x - 1, \quad y^2 \geq 2y - 1, \quad z^2 \geq 2z - 1,$$

w których obie strony są nieujemne na mocy założenia $x, y, z \geq \frac{1}{2}$.

2.3 Ciągi

Rozwiązanie zadania 32. Niech $a_n = n$ i $b_m = 2^{k-m}$ – wówczas jedynymi całkowitymi dodatnimi wyrazami ciągu (b) są $b_1, b_2, \dots, b_k$.

Rozwiązanie zadania 33. Wykażemy przez indukcję, że $a_n > a_{n-1}$. Zaczniemy od tego, że $a_2 = 3a_1 - 1 \geq 3a_1 - a_1 = 2a_1 > a_1$.

Ustalmy teraz $n \geq 3$ i założmy, że $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1}$. Dla liczb nieparzystych $n = 2t + 1$ teza indukcyjna wynika bezpośrednio z treści zadania. Jeśli $n = 2t$ jest liczbą parzystą, to

$$a_n = a_{2t} = 3a_t - 1 \geq 3(a_{t-1} + 1) - 1 > 3a_{t-1} + 1 = a_{2t-1} = a_{n-1},$$

co kończy krok indukcyjny.

Rozwiązanie zadania 34. Taki ciąg istnieje. Dla przykładu niech $a_1 = 0$ oraz $a_n = 1 + \frac{1}{2^{n-1}}$ dla $n \geq 2$. Wtedy oczywiście $a_2 > a_3 > \dots$ oraz

$$s_n = \frac{0 + (1 + \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{4}) + \dots + (1 + \frac{1}{2^{n-1}})}{n} = 1 - \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}$$

dla $n \geq 2$, więc $s_2 < s_3 < \dots$, co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania 35. Przykładem takiego ciągu jest ciąg zdefiniowany w następujący sposób:

- $a_1 = 1, a_2 = 2$;
- a_{2n+2} jest najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, różną od $a_1, \dots, a_{2n}$;
- a_{2n+1} jest wielokrotnością liczby $a_{2n} \cdot a_{2n+2}$, różną od $a_1, \dots, a_{2n}$ i a_{2n+2} .

Jest jasne, że żadna z liczb całkowitych dodatnich nie wystąpi w takim ciągu więcej niż raz. Drugi z warunków gwarantuje, że wszystkie liczby całkowite nieujemne wystąpią w ciągu, natomiast trzeci zapewnia, że każdy wyraz będzie wielokrotnością lub dzielnikiem poprzedniego.

Rozwiązanie zadania 36. Niech

$$a_3 = a_6 = a_9 = \dots = a_{3n} = 1, \quad a_{3n+1} = a_{3n+2} = \dots = a_{4n} = 1,$$

pozostałe wyrazy równe -1 . Wtedy wartość danego wyrażenia wynosi $4n - 4$. Wykażemy, że jest to największa możliwa wartość. Połóżmy

$$s_i = a_i a_{i+1} a_{i+2} \in \{1, -1\} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, 4n,$$

przy czym przyjmujemy $a_{4n+1} = a_1$ i $a_{4n+2} = a_2$. Szukamy największej wartości bezwzględnej wyrażenia $S = s_1 + s_2 + \dots + s_{4n}$. Ponieważ

$$s_1 s_2 \dots s_{4n} = (a_1 a_2 \dots a_{4n})^3 = (1^{2n} \cdot (-1)^{2n})^3 = 1,$$

w sumie S jest parzyście wiele składników równych -1 . Niech $2k$ oznacza liczbę składników równych -1 , oczywiście k jest całkowite nieujemne. Wtedy

$$S = -2k + (4n - 2k) = 4(n - k),$$

zatem $4 \mid S$. Wystarczy więc wykazać, że $|S| \neq 4n$.

Przypuśćmy, że $S = 4n$. Wtedy $s_1 = s_2 = \dots = s_{4n} = 1$, więc w każdej z $4n$ trójek (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) są trzy jedyńki albo jedna. Ponieważ łącznie we wszystkich trójkach jest $6n$ jedynek, w co najmniej jednej z nich muszą być trzy jedyńki. Niech więc $a_j = a_{j+1} = a_{j+2} = 1$ dla pewnego j . Z równości $s_i = s_{i+1}$ otrzymujemy $a_i = a_{i+3}$, a dalej dowodzimy indukcyjnie, że $a_1 = a_2 = \dots = a_{4n} = 1$. Jest to poszukiwana sprzeczność.

Jeżeli $S = -4n$, to każdą liczbę a_i zastępujemy liczbą $-a_i$ i możemy rozumować dokładnie tak samo, jak w przypadku $S = 4n$.

Rozwiązanie zadania 37. Przypuśćmy, że istnieje ciąg $(a_1, a_2, \dots)$ spełniający warunki zadania. Wtedy

$$a_4 < a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 < 3a_4,$$

zatem $2a_4 = a_1 + a_2 + a_3$ na mocy podzielności $a_4 \mid a_1 + a_2 + a_3$. Udowodnimy przez indukcję, że dla $n \geq 4$ zachodzi równość $2a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$.

Krok indukcyjny przebiega następująco:

$$a_{n+1} < a_1 + a_2 + \dots + a_n = 3a_n < 3a_{n+1},$$

więc $2a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ na mocy podzielności $a_{n+1} \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Z udowodnionej indukcyjnie równości, dla $n \geq 4$ mamy

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{2}(2a_n + a_n) = \frac{3}{2}a_n.$$

Wobec tego $a_{4+n} = (3/2)^n a_4$, więc dla każdego n zachodzi podzielność $2^n \mid a_4$. Jest to sprzeczność, zatem ciąg o żądanych własnościach nie istnieje.

Rozwiązanie zadania 38. Rozważmy najpierw $c \leq \frac{1}{2}$. Jeśli $a_n \neq n$, to $a_n \geq 2n$ i tym samym

$$a_n \leq 2(a_n - n) < 2ca_{n-1} \leq a_{n-1}.$$

W takim razie gdyby nierówność $a_n \neq n$ zachodziła dla wszystkich $n \geq 2$, nasz ciąg byłby nieskończonym malejącym ciągiem liczb naturalnych, a to jest niemożliwe. Wobec tego $a_n = n$ dla pewnego n w przypadku $c \leq \frac{1}{2}$. Pozostaje rozważyć $c > \frac{1}{2}$ – dla takich c skonstruujemy ciąg (a) . Połóżmy $c = \frac{1}{2} + \varepsilon$ oraz $q_n = \frac{a_n}{n}$. Liczby q_n są całkowite dodatnie, a ponadto

$$q_n = \frac{a_n}{n} \geq \frac{ca_{n-1}}{n} = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) q_{n-1}.$$

Stąd dla wszystkich $n \geq 2$ mamy $q_n > \frac{1}{4}q_{n-1}$ oraz dla odpowiednio dużych n , powiedzmy $n > N$, zachodzi nierówność $q_n > \frac{1}{2}q_{n-1}$. Z tego wynika, że jeśli $q_{n-1} > 1$, to $q_n > 1$ dla $n > N$. Wystarczy zatem tak dobrać q_1 , by $q_N > 1$. Na mocy nierówności $q_n > \frac{1}{4}q_{n-1}$, dobrym wyborem jest $q_1 = 4^N$. Wtedy dla wszystkich n zachodzi nierówność $q_n > 1$, równoważnie $a_n > n$.

2.4 Funkcje

Rozwiązanie zadania 39. Wstawiając $-x$ w miejsce x , otrzymamy równość $-xf(-x) + f(x) = 1$. Mnożąc równość z zadania obustronnie przez x , otrzymamy $x^2f(x) + xf(-x) = x$. Dodając obustronnie te dwie równości, dostajemy $f(x) + x^2f(x) = x + 1$, co prowadzi do $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcja ta spełnia warunki zadania.

Rozwiązanie zadania 40. Przypuśćmy, że f nie jest funkcją stałą. Wtedy $r = |f(x) - f(y)| \neq 0$ dla pewnych liczb rzeczywistych x i y . Wybierzmy tak dużą liczbę M , aby zachodziły nierówności $|x - M| > \frac{2}{r}$ i $|M - y| > \frac{2}{r}$. Wtedy otrzymujemy sprzeczność

$$r = |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| \leq \frac{1}{|x-M|} + \frac{1}{|M-y|} < r,$$

która dowodzi, że funkcja f jest stała.

Rozwiązanie zadania 41. Wstawiając $x = 0$ do równania danego w zadaniu, otrzymujemy $f(0) = f(f(0))$, zatem również $f(f(0)) = f(f(f(0)))$. Wstawiając $x = f(0)$, otrzymamy $f(f(0)) = f(f(f(0))) + f(0)$. Dwie użyte równości pozwalają wywnioskować, że $f(0) = 0$.

Niech x_0 będzie dowolnym miejscem zerowym funkcji f . Wtedy

$$0 = f(x_0) = f(f(x_0)) + x_0 = f(0) + x_0 = x_0,$$

więc 0 jest jedynym miejscem zerowym funkcji f .

Komentarz. Istnieją funkcje spełniające warunki tego zadania, choć wskazać je niełatwo i wymaga to trochę wiedzy. Podamy tu przykładową konstrukcję. Najpierw podzielimy zbiór $\mathbb{R}_+$ na parymi rozłączne trójki różnych liczb (a, b, c) , w których $a + c = b$. Taki podział zbioru $\mathbb{Q}_+$ jest nietrudny – można zrobić to „zachłannie”. Niech K będzie zbiorem reprezentantów warstw grupy ilorazowej $\mathbb{R}_+^\times / \mathbb{Q}_+^\times$. Żądany podział zbioru $\mathbb{R}_+$ tworzą trójki postaci (ak, bk, ck) , w której $k \in K$ i (a, b, c) jest jedną z trójek dzielących zbiór $\mathbb{Q}_+$. Funkcję f definiujemy następująco: $f(0) = 0$ oraz dla każdej trójki (a, b, c) , na które podzielony został zbiór $\mathbb{R}_+$, niech

$$f(\pm a) = \pm b, \quad f(\pm b) = \pm c, \quad f(\pm c) = \mp a.$$

Znacznie łatwiej podać przykład funkcji $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, spełniającej to równanie – wystarczy wziąć $f(z) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z$.

Rozwiązanie zadania 42. Wybierzmy dowolne naturalne $n > 0$. Niech

$$a_0 = n \quad \text{oraz} \quad a_{i+1} = f(a_i) \quad \text{dla } i \geq 0.$$

Z warunków zadania mamy $a_n = n$, więc liczba n pojawia się w ciągu (a) nie tylko jako zerowy wyraz. Wobec tego możemy wybrać najmniejsze takie $t > 0$, dla którego $a_t = n = a_0$. Prosta indukcja dowodzi, że $a_{k+t} = a_k$ dla wszystkich $k \geq 0$, więc ciąg ten jest okresowy z okresem zasadniczym t . Wobec tego równość $a_k = n$ zachodzi tylko dla $t \mid k$. Wnioskujemy stąd, że $t \mid n$.

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla ciągu, który rozpoczyna się wyrazem $b_0 = f(n)$. Wówczas mamy $b_i = a_{i+1}$, więc ciąg (b) również ma okres zasadniczy t . Jak poprzednio, dowodzimy, że $t \mid f(n)$.

Jeśli $n = p$ jest liczbą pierwszą, to $t = 1$ lub $t = p$. W pierwszym przypadku mamy $f(p) = p$, a w drugim $p \mid f(p)$ – czyli w obu spełniona jest podzielność $p \mid f(p)$. Dowód jest zakończony, bo liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Rozwiązanie zadania 43. Niech f^k oznacza k -krotne złożenie funkcji f , w szczególności funkcja f^0 to identyczność. Zauważmy najpierw, że

$$f(n) = f^2(n-1) = f^3(n-2) = \dots = f^n(1).$$

Położmy $c = f(1)$. Jeśli $c = 1$, to funkcja f jest stała, czyli okresowa o okresie 1. Dalej możemy przyjąć $c \geq 3$, bo $c \neq 2$. Wtedy $f^c(1) = f(c) = f^2(1)$,

zatem dla $n \geq c$ mamy

$$f(n) = f^n(1) = f^{n-c}(f^c(1)) = f^{n-c}(f^2(1)) = f^{n-c+2}(1) = f(n-c+2).$$

Wobec równości $g(n) = f(n+1)$ otrzymujemy $g(n) = g(n-c+2)$ dla $n \geq c-1$, czyli $g(m+c-2) = g(m)$ dla $m \geq 1$, co kończy dowód.

2.5 Wielomiany

Rozwiązanie zadania 44. Zauważmy, że dla $x \neq 0$ zachodzą równości

$$\begin{aligned} x^n P\left(\frac{1}{x}\right) &= x^n \left(\frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{x} + a_0 \right) \\ &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n. \end{aligned}$$

W takim razie wielomian P stopnia n jest palindromiczny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek

$$P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Niech P i Q będą wielomianami palindromicznymi stopni odpowiednio n i m . Zachodzą wtedy równości

$$R(x) = P(x)Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^m Q\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n+m} R\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wielomian R ma stopień $n+m$, zatem, na mocy wcześniej dowiedzonego faktu, jest on palindromiczny.

Drugie rozwiązanie zadania 44. Niech $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ oraz $Q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$, przy czym $a_n, b_m \neq 0$, będą wielomianami palindromicznymi. Wtedy wielomian $P(x)Q(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k$ ma stopień $k = n+m$. Przyjmujemy konwencję $a_j = 0$ dla $j < 0$ oraz $j > n$, analogicznie dla współczynników wielomianu $Q(x)$. Wówczas

$$c_{m+n-t} = \sum_{i+j=m+n-t} a_i b_j = \sum_{i+j=m+n-t} a_{n-i} b_{m-j} = \sum_{i'+j'=t} a_{i'} b_{j'} = c_t$$

dla każdego $t \in \{0, 1, \dots, m+n\}$ (w przedostatniej równości miało miejsce przeindeksowanie sumy: $i' = n-i$, $j' = m-j$ - wtedy $i'+j' = m+n-i-j = t$). Otrzymana równość dowodzi palindromiczności wielomianu $P(x)Q(x)$.

Rozwiązanie zadania 45. Suma współczynników wielomianu wynosi

$$P(1) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1.$$

Przy x^n jest współczynnik 1, więc suma pozostałych współczynników jest równa n , a wszystkie są dodatnie. Wobec tego każdy z nich jest mniejszy od n .

Rozwiązanie zadania 46. Niech $x_0 > 0$ oraz $P(x_0) = 0$. Mamy $P(x) \rightarrow +\infty$ przy $x \rightarrow +\infty$. Na mocy własności Darboux istnieje takie $x_1 \in (x_0, \infty)$, że $P(x_1) = x_0$. Wtedy

$$Q(x_1) = P(P(x_1)) = P(x_0) = 0,$$

przy czym $x_1 > x_0 > 0$.

Rozwiązanie zadania 47. Dla parzystych n taki wielomian istnieje. Niech $n = 2k$ oraz $P(x) = (x^2 - x + 1)^k$. Wielomian ten ma stopień n , a ponadto dzieli $Q(x)$, gdyż

$$\begin{aligned} Q(x) &= ((x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1) + 1)^k = (x^4 - x^2 + 1)^k \\ &= (x^2 - x + 1)^k (x^2 + x + 1)^k = P(x)(x^2 + x + 1)^k. \end{aligned}$$

Dla nieparzystych n odpowiedź jest negatywna. Jako wielomian nieparzystego stopnia, $P(x)$ ma pierwiastek rzeczywisty, powiedzmy x_1 . Niech

$$x_{k+1} = x_k^2 + 1 \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots$$

Jest jasne, że $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$. Przypuśćmy, że wielomian $Q(x)$ jest podzielny przez $P(x)$, czyli $Q(x) = P(x)W(x)$ dla pewnego wielomianu $W(x)$. Jeżeli wtedy $P(x_k) = 0$ dla pewnego $k \geq 1$, to

$$P(x_{k+1}) = P(x_k^2 + 1) = Q(x_k) = P(x_k)W(x_k) = 0.$$

Wobec tego, na mocy zasady indukcji, wielomian $P(x)$ ma nieskończenie wiele pierwiastków, czyli jest wielomianem zerowym – sprzeczność.

Rozwiązanie zadania 48. Jest jasne, że wielomian $P(x)$ nie może być stały. Jeśli współczynnik przy najwyższej potędze x tego wielomianu jest ujemny, to $P(n) > 0$ tylko dla skończenie wielu całkowitych dodatnich n .

Przypuśćmy, że wielomian $P(x)$ ma stopień większy niż 1 i dodatni współczynnik przy najwyższej potędze x . Wtedy $P(x) > x$ dla wszystkich $x \geq N$, przy czym N jest pewną liczbą całkowitą dodatnią. W tej sytuacji liczby $1, 2, \dots, N$ musiałyby być wartościami $P(x)$ dla $x = 1, 2, \dots, N - 1$, co nie jest możliwe.

Komentarz. Wszystkie wielomiany spełniające warunki zadania są postaci $P(x) = \frac{x+a}{b}$, przy czym a i b są liczbami całkowitymi i $b > \max\{a, 0\}$.

Rozwiązanie zadania 49. Niech $k > 0$ będzie liczbą całkowitą oraz niech $n = |P(k)| \neq 0$. Oczywiście $n \mid P(k)$, więc także $n \mid P(k+n)$. Z warunków zadania wynika, że $k+n \geq 2n$, równoważnie $k \geq n = |P(k)|$. Wobec tego nierówność $|P(k)| \leq k$ zachodzi dla wszystkich całkowitych dodatnich k , zatem stopień wielomianu P nie przekracza 1.

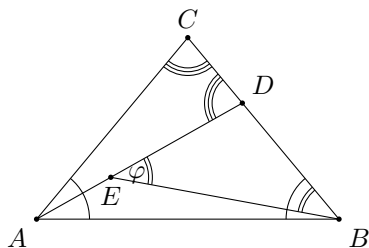
Z powyższych rozważań wynika, że $P(x) = x$ lub $P(x) = -x$. Łatwo sprawdzić, że oba te wielomiany spełniają warunki zadania.

Rozdział 3

Geometria

3.1 Rachunki na kątach

Rozwiązanie zadania 50. Równości boków w treści zadania są równoważne równościom odpowiednich kątów, zaznaczonych na poniższym rysunku.



Niech $|\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle BED| = \varphi$. Wtedy $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ADC| = 2\varphi$, gdyż kąt ADC jest kątem zewnętrznym przy wierzchołku D trójkąta BDE . Mamy wobec tego $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC| = 90^\circ - \varphi$ oraz

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ABE| &= |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle DBE| \\ &= 90^\circ - 2\varphi. \end{aligned}$$

Stąd $|\sphericalangle ABE| + 2|\sphericalangle DBE| = 90^\circ$.

Rozwiązanie zadania 51. Niech $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Mamy $|CD| = |CL|$, więc $|\sphericalangle CDL| = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, a stąd $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle BDL| = \frac{\alpha}{2}$. Kąt zewnętrzny przy wierzchołku A trójkąta ADP ma miarę α , więc $|\sphericalangle APD| + |\sphericalangle ADP| = \alpha$.

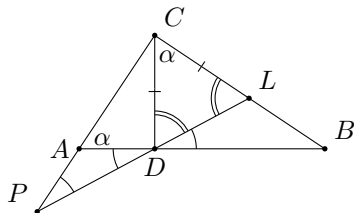
Wobec $|\sphericalangle ADP| = \frac{\alpha}{2}$ mamy

$$|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle ADP| = \frac{\alpha}{2},$$

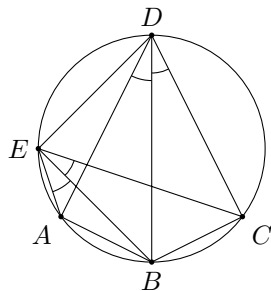
więc $|AP| = |AD|$. Analogicznie dowodzimy, że $|BQ| = |BD|$. Ostatecznie

$$|AP| + |BQ| = |AD| + |BD| = |AB|,$$

co kończy dowód.



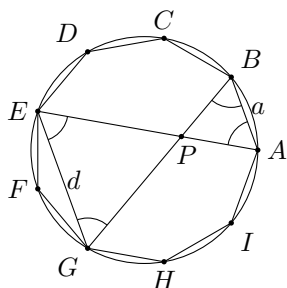
Rozwiązanie zadania 52. Wykażemy najpierw, że na pięciokącie $ABCDE$ można opisać okrąg. Ponieważ czworokąt $BCDE$ jest wypukły oraz $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BEC|$, wnioskujemy, że można na nim opisać okrąg. Analogicznie dowodzimy, że na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg. Okręgi te mają punkty wspólne B, D, E , więc są identyczne i opisane na pięciokącie $ABCDE$. Na mocy równości $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle BDC|$ wnioskujemy równość długości łuków AB i BC , a co za tym idzie, równość długości odcinków AB i BC .



Rozwiązanie zadania 53. Oznaczmy kolejne wierzchołki danego dziewięciokąta foremnego przez $A, B, C, \dots, I$ oraz opiszmy na nim okrąg.

Kąt wpisany ABG jest oparty na $\frac{1}{3}$ okręgu, zatem jego miara wynosi 60° . W podobny sposób wnioskujemy, że

$$|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle AEG| = |\sphericalangle BGE| = 60^\circ.$$



W takim razie trójkąty ABP i EGP są równoboczne. Stąd

$$|AE| = |AP| + |PE| = |AB| + |GE| = a + d,$$

co kończy dowód, gdyż AE jest najdłuższą przekątną rozważanego dziewięciokąta.

Drugie rozwiązanie zadania 53. Wpiszmy dany dziewięciokąt w okrąg o promieniu R . Niech e będzie długością najdłuższej przekątnej tego dziewięciokąta. Na mocy twierdzenia sinusów:

$$a = 2R \sin 20^\circ, \quad d = 2R \sin 40^\circ, \quad e = 2R \sin 80^\circ.$$

Zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned} \sin 40^\circ + \sin 20^\circ &= 2 \sin \frac{40^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{40^\circ - 20^\circ}{2} \\ &= 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 80^\circ = \sin 80^\circ, \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania 54. Jeśli $|AC| = |BC|$, to $P = Q = C$, więc $|OP| = |OQ| = R$. Niech $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $|AC| > |BC|$. Należy uwzględnić dwa przypadki: $\beta < 90^\circ$ oraz $\beta > 90^\circ$ (jeśli $\beta = 90^\circ$, to prosta BC nie przecina symetralnej odcinka AB). Rozważmy pierwszy z nich.

Z równości $|OA| = |OC| = R$ wynika, że

$$|\sphericalangle ACO| = \frac{180^\circ - |\sphericalangle AOC|}{2} = 90^\circ - \beta = |\sphericalangle BQM|.$$

Trójkąty COP i QOC są zatem podobne na mocy cechy (kk), więc

$$\frac{|OQ|}{|CO|} = \frac{|CO|}{|OP|}.$$

Z tego wnioskujemy, że

$$|OP| \cdot |OQ| = |OC|^2 = R^2,$$

co kończy dowód.

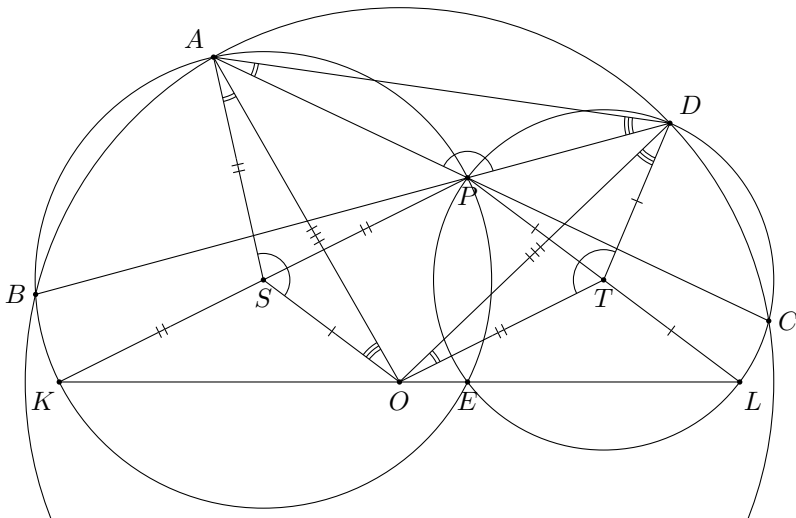
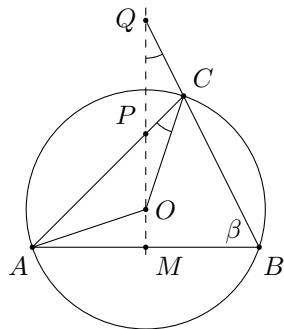
Przypadek $\beta > 90^\circ$ przebiega podobnie. Rachując na kątach, dochodzimy do podobieństwa trójkątów COP i QOC , z którego wynika teza.

Rozwiązanie zadania 55. Niech PK i PL będą średnicami, zaś S i T środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ABP i CDP . Punkty O i T leżą na symetralnej odcinka CD , więc

$$|\sphericalangle DOT| = \frac{1}{2}|\sphericalangle COD| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle PAD|,$$

$$|\sphericalangle DTO| = 180^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle CTD| = 180^\circ - |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle APD|.$$

Trójkąty TOD i PAD są zatem podobne (kk), analogicznie dowodzimy, że trójkąt SAO też jest podobny do PAD . Wobec tego z równości $|AO| = |DO|$ wynika, że trójkąty TOD i SAO są przystające.



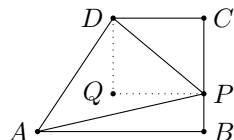
Na mocy równości $|SO| = |DT| = |PT|$ i $|OT| = |AS| = |PS|$ czworokąt $PSOT$ jest równoległobokiem. Z tego wynika, że punkt O jest środkiem od-

cinika KL , gdyż S i T są środkami odcinków odpowiednio PK i PL .

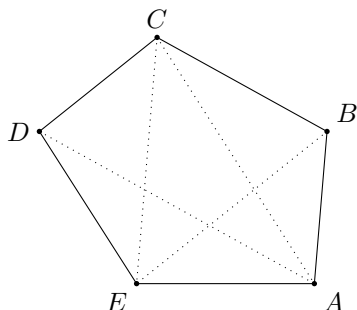
Kąty KEP i LEP są proste jako oparte na półokręgach, więc punkt O leży na prostej KL prostopadłej do PE , przechodzącej przez E . W takim razie okrąg o średnicy OP przechodzi przez punkt E . Analogiczne rozumowanie dla punktu F kończy dowód.

3.2 Rachunki na polach

Rozwiązanie zadania 56. Przypuśćmy, że tak jest oraz, bez straty ogólności, $|AB| \geq |CD|$. Rozważmy prostokąt $CDQP$. Punkt Q leży we wnętrzu trójkąta APD , więc $[CDP] = [PDQ] < [ADP]$ – sprzeczność.



Rozwiązanie zadania 57. Z równoległości $EC \parallel AB$ wynika równość pól $[EAB] = [ABC]$, gdyż trójkąty EAB i ABC mają wspólną podstawę AB , od której punkty E i C są równoodległe.



W analogiczny sposób dowodzimy kolejno równości

$$\begin{aligned} [EAB] &= [ABC] = [BCD] \\ &= [CDE] = [DEA]. \end{aligned}$$

Z równości $[EAB] = [DEA]$ wynika, że punkty B i D są równoodległe od prostej EA . Wobec wypukłości pięciokąta $ABCDE$ prowadzi to do wniosku, że $EA \parallel BD$.

Rozwiązanie zadania 58. Niech P i Q będą środkami okręgów odpowiednio o_1 i o_2 . Oznaczmy ich promień przez r , a wysokość trójkąta ABC opuszczoną na bok BC przez h . Przyjmijmy także $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$.

Z równości pól

$$[ABC] = [BPQC] + [BPA] + [CQA] + [PQA]$$

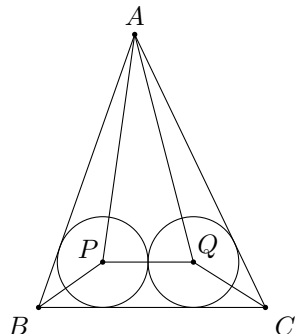
wnoskujemy, że

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(a + 2r)r + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2} \cdot 2r(h - r),$$

co po przekształceniach daje

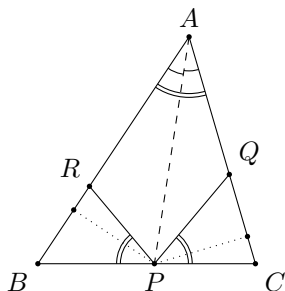
$$r = \frac{ah}{a+b+c+2h} = \frac{ah}{5h} = \frac{1}{5}a,$$

kończąc dowód.

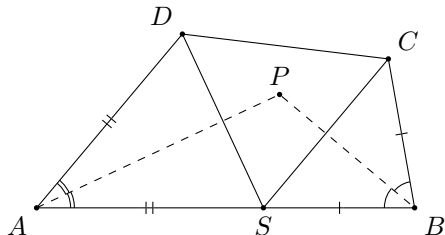


3.3 Ważne punkty i linie w trójkącie

Rozwiązanie zadania 59. Na mocy równości odpowiednich kątów i cechy (kk), trójkąty BPR i QPC są podobne. Skala ich podobieństwa jest równa stosunkowi ich wysokości poprowadzonych z wierzchołka P . Te wysokości są odległościami punktu P od odcinków AB i AC , więc mają równą długość, ponieważ AP jest dwusieczną kąta BAC . Skoro skala podobieństwa wynosi 1, trójkąty BRP i CPQ są przystające.



Rozwiązanie zadania 60. Wybierzmy na odcinku AB punkt S , spełniający warunek $|AS| = |AD|$. Zachodzi wtedy także równość $|BS| = |BC|$.



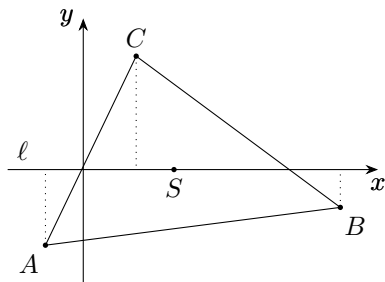
W tej sytuacji dwusieczne kątów ABC i DAB są jednocześnie symetralnymi odcinków CS i DS . Wnioskujemy zatem, że punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDS , a więc zachodzi równość $|CP| = |DP|$.

Rozwiązanie zadania 61. Wprowadźmy układ współrzędnych, w którym oś OX pokrywa się z prostą ℓ , a punkt $C = (x_C, y_C)$ leży nad nią. Wtedy punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ leżą pod osią OX .

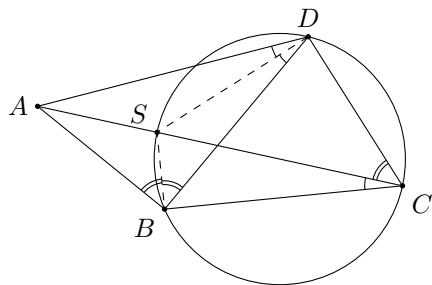
Odległością punktu C od prostej ℓ jest y_C , a odległościami punktów A i B od tej prostej są odpowiednio $-y_A$ i $-y_B$. Środkiem ciężkości trójkąta ABC jest punkt

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right).$$

Punkt S leży na prostej ℓ , wobec czego $y_A + y_B + y_C = 0$, czyli $y_C = -y_A - y_B$, co kończy dowód.



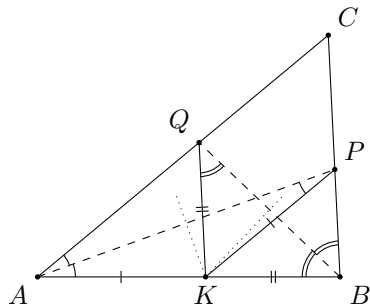
Rozwiązanie zadania 62. Niech okrąg opisany na trójkącie BCD przecina po raz drugi prostą AC w punkcie S . Na mocy twierdzenia o kącie wpisanym



$$|\sphericalangle BDS| = |\sphericalangle BCS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BDA|,$$

zatem prosta BS jest dwusieczną kąta ABD . Analogicznie wnioskujemy, że prosta DS jest dwusieczną kąta ADB , a zatem punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABD . Wobec tego prosta AC , która pokrywa się z prostą AS , jest dwusieczną kąta BAD .

Rozwiązanie zadania 63. Niech K będzie punktem przecięcia symetralnych odcinków AP i BQ , leżącym na AB . Zachodzi wówczas równość kątów $|\sphericalangle APK| = |\sphericalangle KAP| = |\sphericalangle CAP|$, z której wnioskujemy, że $KP \parallel AC$.



Trójkąty ABC i KBP są wobec tego podobne, z czego wynika równość

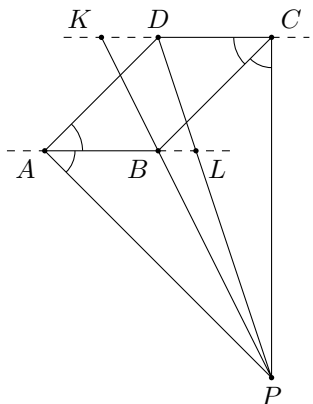
$$|AB| = \frac{|AC| \cdot |BK|}{|KP|} = \frac{|AC| \cdot |BK|}{|AK|}.$$

Analogicznie $KQ \parallel BC$ i wobec tego

$$|AB| = \frac{|BC| \cdot |AK|}{|KQ|} = \frac{|BC| \cdot |AK|}{|BK|}.$$

Mnożąc ostatnie dwie równości stronami, otrzymamy tezę.

Rozwiązanie zadania 64. Z założenia $\alpha < 60^\circ$ wynika, że punkt B leży wewnątrz trójkąta APC .



Niech K będzie punktem przecięcia prostych CD i PB , zaś punkt L – prostych AB i PD . Prosta AL jest dwusieczną kąta PAD , a prosta CB – kąta KCP . Stosując twierdzenie o dwusiecznej, twierdzenie Talesa i znów twierdzenie o dwusiecznej, otrzymamy

$$\frac{|AD|}{|AP|} = \frac{|DL|}{|LP|} = \frac{|KB|}{|BP|} = \frac{|CK|}{|CP|}.$$

Trójkąty DAP i KCP są zatem podobne (bkb), więc $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle CPK|$, a z tego już łatwo wynika teza.

Rozwiązanie zadania 65. Przyjmijmy $c = |AB|$ oraz widoczne na rysunku oznaczenia długości odcinków z tą uwagą, że gdyby punkt B leżał na odcinku AE , to podstawiamy $y = -|BE|$. Odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC , a punkt E – rzutem prostokątnym poszukiwanego punktu P na prostą AB . Równość

$$|BC|^2 - |AP|^2 = |CA|^2 - |BP|^2$$

po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów BCD , AEP , ACD i BEP przyjmuje postać

$$h^2 + (c - x)^2 - (c - y)^2 - e^2 = x^2 + h^2 - y^2 - e^2,$$

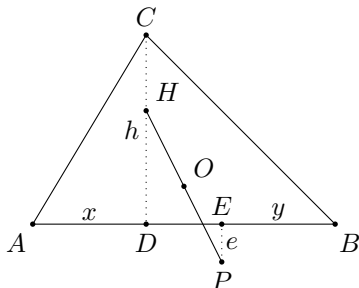
równoważną równości $x = y$. Punkt P ją zatem spełnia wtedy i tylko wtedy, gdy leży na prostej ℓ_C , która jest symetryczna do prostej CD względem symetralnej odcinka AB . Pozostałe równości z treści zadania dają analogiczne rezultaty dla analogicznych prostych ℓ_A i ℓ_B . Punktem wspólnym dla tych trzech prostych jest punkt symetryczny do ortocentrum H trójkąta ABC względem środka O okręgu opisanego na tym trójkącie.

Drugie rozwiązanie zadania 65. Skorzystamy z faktu, że dla każdego trójkąta ostrokątnego ABC istnieje czworokąt równościenny $ABCD$ – czyli taki, w którym $|AD| = |BC|$, $|BD| = |CA|$ i $|CA| = |AB|$.

Zadane warunki spełnia punkt P będący spodkiem wysokości DP tego czworokąta – korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy

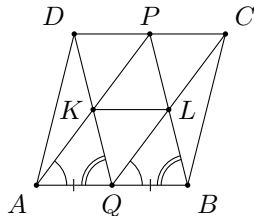
$$|DP|^2 = |AD|^2 - |AP|^2 = |BC|^2 - |AP|^2$$

oraz analogicznie $|DP|^2 = |CA|^2 - |BP|^2$ i $|DP|^2 = |AB|^2 - |CP|^2$.

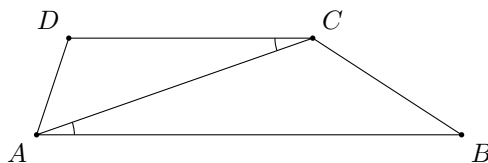


3.4 Równoległość

Rozwiązanie zadania 66. Niech K będzie punktem przecięcia się odcinków AP i DQ , natomiast punkt L – odcinków BP i CQ . Trójkąty AKQ i QLB są podobne do trójkąta APB (bkb) w skali $\frac{1}{2}$. W takim razie $KL \parallel AB$ i $|KL| = \frac{1}{2}|AB|$. W analogiczny sposób dowodzimy, że $KL \parallel DC$ i $|KL| = \frac{1}{2}|DC|$. Czworokąt $ABCD$ ma zatem parę boków równoległych i równej długości, więc jest równoległobokiem.



Rozwiązanie zadania 67. Niech $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ oraz $\varphi = |\sphericalangle CAD|$.

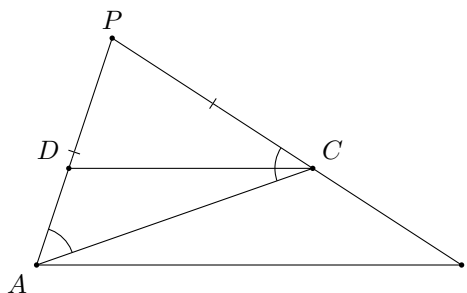


$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{\sin \alpha} = \frac{|AB|}{|BC|}, \text{ więc } |AB| \cdot |AD| = |BC| \cdot |CD|.$$

Mamy $|\sphericalangle ACD| = \alpha$, ponieważ $AB \parallel CD$. Na mocy warunków zadania $|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - \varphi$.

Z twierdzenia sinusów zastosowanego najpierw dla trójkąta ABC , a potem ACD otrzymujemy

Drugie rozwiązanie zadania 67. Poprowadźmy półproste $BC \rightarrow$ i $AD \rightarrow$ do wspólnego punktu P . Taki punkt istnieje, ponieważ $|AB| > |CD|$. Z treści zadania wynika, że $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PCA|$, więc $|AP| = |CP|$.



Na mocy podobieństwa trójkątów ABP i DCP otrzymujemy

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|AP|}{|DP|}.$$

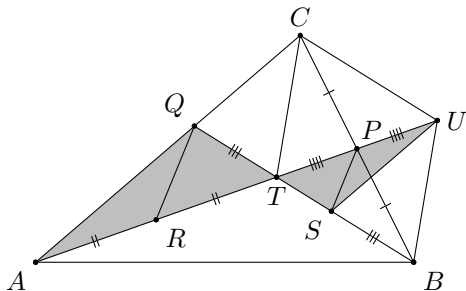
W takim razie

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{|CD|} &= \frac{|BP| - |AP|}{|CP| - |DP|} \\ &= \frac{|BP| - |CP|}{|AP| - |DP|} = \frac{|BC|}{|AD|}, \end{aligned}$$

co jest równoważne tezie.

Rozwiązanie zadania 68. Wybierzmy taki punkt U , by czworokąt $BUCT$ był równoległobokiem. Wtedy $CU \parallel QS$ oraz $|CU| = |BT| = |QS|$.

Wnioskujemy stąd, że czworokąt $CQSU$ także jest równoległobokiem, więc $CQ \parallel SU$. W takim razie trójkąty AQT i UST są jednokładne względem punktu T . Ponieważ punkty P i R są środkami odcinków odpowiednio TU i AT , trójkąty QRT i PST są także jednokładne względem punktu T . A stąd już wynika teza.



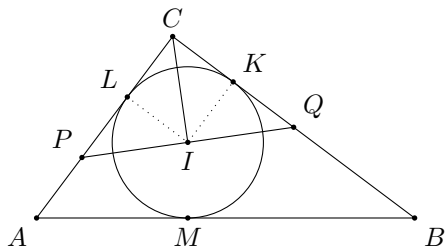
Drugie rozwiązanie zadania 68. Skorzystamy z geometrii mas. W punktach A, B, C umieścimy odpowiednio takie masy m_A, m_B, m_C , by ich barycentrum był punkt T . Ponieważ punkt T leży na środkowej boku BC , mamy $m_B = m_C$. Wówczas

$$\frac{|TS|}{|TQ|} = \frac{|BT|}{|TQ|} - 1 = \frac{m_A + m_B}{m_C} - 1 = \frac{m_A}{m_B} = 2 \cdot \frac{m_A}{m_B + m_C} = 2 \cdot \frac{|PT|}{|TA|} = \frac{|PT|}{|TR|},$$

z czego natychmiast wnioskujemy, że $QR \parallel PS$.

3.5 Nierówności w geometrii

Rozwiązanie zadania 69. Niech K, L, M oznaczają punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC do boków odpowiednio BC, CA, AB .



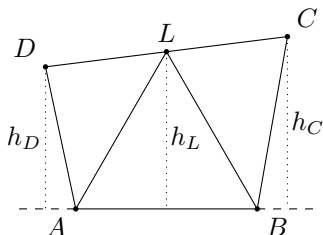
Punkt K jest spodkiem wysokości trójkąta prostokątnego CIQ , opuszczonej na przeciwprostokątną CQ . Wobec tego leży on na odcinku CQ i w konsekwencji $|BK| > |BQ|$. Analogicznie $|AL| > |AP|$. Ponieważ $|AL| = |AM|$ i $|BK| = |BM|$, zachodzi nierówność

$$|AP| + |BQ| < |AL| + |BK| = |AB|.$$

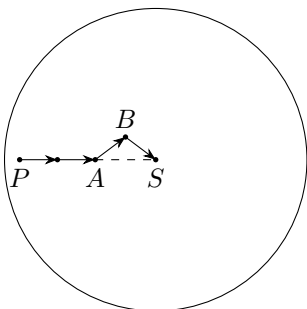
Rozwiązanie zadania 70. Oznaczmy przez h_C, h_D, h_L odległości punktów odpowiednio C, D, L od prostej AB . Punkt L jest środkiem odcinka CD , więc

$$|AB|\sqrt{3} = 2h_L = h_C + h_D \leq |BC| + |DA|,$$

co kończy dowód.



Rozwiązanie zadania 71. Dla $d > 1$ pchła nie może wykonać żadnego skoku ze środka S koła. Wykażemy, że dla $d \leq 1$ pchła może się dostać z każdego punktu koła na dowolny inny.



Wystarczy w tym celu udowodnić, że z każdego punktu koła pchła może dostać się do punktu S – wówczas, wykonując skoki w odwrotnej kolejności, pchła będzie mogła przejść z punktu S do każdego innego.

Niech pchła porusza się po odcinku łączącym jej pozycję początkową P ze środkiem koła, aż znajdzie się w punkcie A , dla którego $|SA| < 2d$. Wówczas istnieje punkt B spełniający równość $|AB| = |SB| = d$. Punkt ten leży na danym kole, gdyż $|SB| = d \leq 1$. Z punktu A pchła może skoczyć do B , a następnie do S .

Rozwiązanie zadania 72. Przyjmijmy oznaczenia widoczne na rysunku. Zwróćmy też uwagę, że nie ma znaczenia, który z punktów K , L położony jest bliżej punktu A .

Niech $\mathcal{P}_\omega(A)$ oznacza potęgę punktu A względem okręgu ω . Zachodzą równości

$$n^2 = |AN|^2 = \mathcal{P}_\omega(A) = |AK| \cdot |KL| = k(k+x),$$

analogicznie $m^2 = l(l+x)$. Okrąg ω jest jednokładny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC w stosunku większym niż 1, więc

$$n+m < |AE| + |BD| = |AF| + |BF| = |AB|.$$

Z tego wynika, że

$$\begin{aligned} & |AB| \cdot \left| |AC| - |BC| \right| \\ &= |AB| \cdot |n-m| \\ &\geq (n+m)|n-m| = |n^2 - m^2| \\ &= |k^2 + kx - l^2 - lx| \\ &= (k+l+x)|k-l| = |AB| \cdot |k-l|. \end{aligned}$$

Tezę otrzymamy, dzieląc powyższą nierówność obustronnie przez $|AB|$.

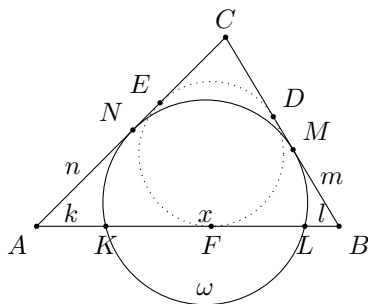
Rozwiązanie zadania 73. Niech A i B będą takimi punktami spośród n danych, że $|AB| = d_1$. Pozostałe punkty nazwijmy $C_1, C_2, \dots, C_{n-2}$ w taki sposób, by zachodziły nierówności

$$\begin{aligned} \max \{|AC_1|, |BC_1|\} &> \max \{|AC_2|, |BC_2|\} \\ &> \dots > \max \{|AC_{n-2}|, |BC_{n-2}|\}. \end{aligned}$$

Wtedy $\max \{|AC_{n-2}|, |BC_{n-2}|\} \leq d_{n-1}$, ponieważ mamy przynajmniej $n-2$ odcinków o większej długości – są to AB oraz dłuższy z każdej pary odcinków AC_k, BC_k dla $k = 1, 2, \dots, n-3$. Stąd $\min \{|AC_{n-2}|, |BC_{n-2}|\} \leq d_n$. Korzystając z nierówności trójkąta, otrzymujemy

$$\begin{aligned} d_1 &\leq |AC_{n-2}| + |BC_{n-2}| \\ &= \max \{|AC_{n-2}|, |BC_{n-2}|\} + \min \{|AC_{n-2}|, |BC_{n-2}|\} \\ &\leq d_{n-1} + d_n, \end{aligned}$$

co kończy dowód.



Rozwiązanie zadania 74. Dla każdego zaznaczonego punktu X określony jest jednoznacznie punkt $b(X)$, który jest położony najbliżej X ze wszystkich pozostałych zaznaczonych punktów oraz punkt $d(X)$, który jest położony najdalej od punktu X ze wszystkich zaznaczonych punktów. Odcinek AB jest dziwny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi co najmniej jedna z możliwości:

$$A = d(B) \text{ i } B = b(A) \quad \text{lub} \quad A = b(B) \text{ i } B = d(A).$$

Dla każdego $n \geq 2$ istnieje rozmieszczenie punktów z przynajmniej jednym dziwnym odcinkiem: wystarczy najpierw zaznaczyć $n - 1$ punktów zgodnie z warunkami zadania, a następnie dodać n -ty punkt X wystarczająco daleko od nich. Wówczas punkty X i $b(X)$ są końcami dziwnego odcinka.

Udowodnimy metodą nie wprost, że liczba dziwnych odcinków nie przekracza 1. Przypuśćmy zatem, że istnieją przynajmniej dwa dziwne odcinki. Należy tu rozważyć dwa przypadki.

1. Pewne dwa dziwne odcinki mają wspólny koniec – powiedzmy AB i BC . Bez straty ogólności niech $A = b(B)$ i $C = d(B)$. Wtedy $B = d(A)$ oraz $B = b(C)$. Otrzymujemy stąd sprzeczność

$$|AB| < |BC| < |CA| < |AB|.$$

2. Pewne dwa dziwne odcinki nie mają wspólnego końca – nazwijmy je AB i CD . Bez utraty ogólności niech $A = b(B)$ i $B = d(A)$, a także $C = b(D)$ i $D = d(C)$. Znowu mamy sprzeczność

$$|CD| < |AD| < |AB| < |BC| < |CD|.$$

Największa możliwa liczba dziwnych odcinków jest zatem niezależna od n i wynosi 1.

Rozwiązanie zadania 75. Obróćmy trójkąt ABC wokół punktu A w taki sposób, by obrazem punktu K był punkt L . Otrzymaliśmy trójkąt $AB'C'$. Mamy $90^\circ < |\sphericalangle BAC'| < 180^\circ$, więc zachodzi nierówność

$$|AB|^2 + |AC'|^2 < |BC'|^2.$$

Na mocy nierówności trójkąta

$$|BC'| \leq |BL| + |C'L|.$$

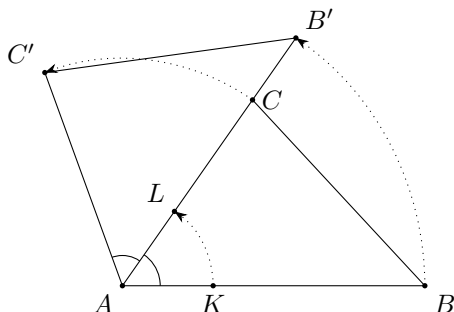
Korzystając z równości

$$|CK| = |C'L| \quad \text{i} \quad |AC| = |AC'|,$$

otrzymujemy nierówność

$$|AB|^2 + |AC|^2 < (|BL| + |CK|)^2,$$

co kończy dowód.



Rozdział 4

Kombinatoryka

4.1 Zasada szufladkowa

Rozwiązanie zadania 76. Na każdej ścianie dwudziestościanu zapisano liczbę ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 18\}$ (19 możliwości), a ścian jest 20. Wobec tego pewne dwie zapisane liczby są jednakowe.

Rozwiązanie zadania 77. Dla $k = 2, 3, 4, 5, 6$ oznaczamy przez a_k liczbę żetonów o wartości k zł. Zauważmy, że jeśli zachodzi co najmniej jedna z nierówności:

$$a_2 + a_4 \geq 30, \quad a_3 + a_6 \geq 20, \quad a_5 \geq 12,$$

to bez trudu wypłacimy 60 zł. Jeżeli zaś żadna z nich nie zachodzi, to

$$a_2 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 \leq 29 + 19 + 11 = 59 < 60,$$

co jest sprzeczne z warunkami zadania.

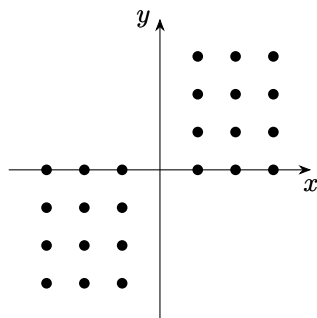
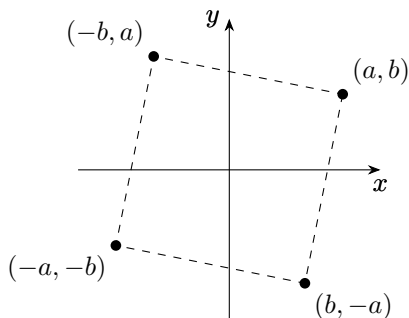
4.2 Zagadnienia ekstremalne

Rozwiązanie zadania 78. Nazwijmy wybrany podzbiór *dużym*, jeśli ma przynajmniej dwa elementy. Każdemu dużemu zbiorowi przypisujemy dowolny jego dwuelementowy podzbiór. Przypisane podzbiory muszą być różne, więc liczba wybranych dużych podzbiorów nie przekracza $\binom{n}{2}$. Wszystkich podzbiorów, które nie są duże jest $n + 1$ (zbiory jednoelementowe i zbiór pusty). Wobec tego nie można wybrać więcej niż $\binom{n}{2} + n + 1 = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ podzbiorów. To oszacowanie jest optymalne – taką liczbę podzbiorów otrzymamy, wybierając wszystkie o co najwyżej dwóch elementach.

Rozwiązanie zadania 79. Wykażemy, że szukaną liczbą jest $2n^2 + 2n + 1$. Jest to więcej niż połowa elementów zbioru A , więc jeśli podzielimy zbiór A na czwórki postaci

$$\{(a, b), (b, -a), (-a, -b), (-b, a)\}$$

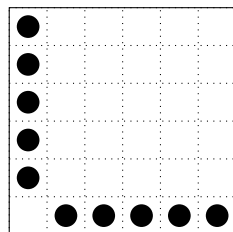
(rysunek po lewej stronie), to w którejs spośród tych czwórek znajdują się przynajmniej trzy punkty. Pewne dwa z tych trzech punktów dadzą nam kąt prosty o wierzchołku O , gdyż każda z tych czwórek wyznacza kwadrat.



Z drugiej strony, w zbiorze punktów, który przedstawiono na rysunku po prawej stronie, jest $2n^2 + 2n$ punktów i żadne dwa z nich nie wyznaczają kąta prostego o wierzchołku O .

Rozwiązanie zadania 80. Niech k będzie liczbą wież, które są jedyne w swojej kolumnie, natomiast w – analogicznie z wierszem. Każda z wież należy do przynajmniej jednego z tych typów, liczba wież nie przekracza więc $k + w$.

Jeżeli $k < n$ i $w < n$, to liczba wież nie przekracza $2n - 2$. Jeśli zaś $k = n$, to $w = 0$ i mamy łącznie $n \leq 2n - 2$ wież na szachownicy; analogicznie jest dla $w = n$. Rysunek przedstawia ustawienie $2n - 2$ wież na szachownicy $n \times n$ zgodnie z regułami zadania.



Rozwiązanie zadania 81. Wykażemy, że szukaną liczbą jest $k = (n - 1)!$. Na początek zauważmy, że każde dwie permutacje kończące się liczbą n są podobne, a jest ich właśnie tyle.

Dla permutacji $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ rozważmy jej cykliczne przesunięcia:

$$(a_2, a_3, \dots, a_n, a_1), \quad (a_3, \dots, a_n, a_1, a_2), \quad \dots, \quad (a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}).$$

W ten sposób podzielimy zbiór wszystkich $n!$ permutacji na n -elementowe, rozłączne klasy. Żadne dwie permutacje z jednej klasy nie są podobne, więc możemy wybrać co najwyżej jedną z każdej klasy. To dowodzi, że nie można wybrać więcej niż $n!/n = (n - 1)!$ permutacji.

Rozwiązanie zadania 82. Udowodnimy, że szukaną liczbą jest $k = 2^{n-1}$. Niech $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Oznaczmy rodzinę wybranych zbiorów przez $\mathcal{W}$.

Jeśli $\mathcal{W}$ stanowią wszystkie podzbiory zbioru $X \setminus \{n\}$, których jest 2^{n-1} , to żądane warunki są spełnione.

Pozostaje zatem wykazać, że jeśli $|\mathcal{W}| > 2^{n-1}$, to wszystkie podzbiory zbioru X należą do $\mathcal{W}$. W tym celu weźmy dowolny $x \in X$ i pogrupujmy wszystkie podzbiory zbioru X w pary

$$(A, A \cup \{x\}), \text{ przy czym } A \subseteq X \setminus \{x\}.$$

Tych par jest $2^{n-1} < |\mathcal{W}|$, zatem dla pewnego $A \subseteq X \setminus \{x\}$ mamy jednocześnie $A \in \mathcal{W}$ i $A \cup \{x\} \in \mathcal{W}$, więc również $\{x\} = (A \cup \{x\}) \setminus A \in \mathcal{W}$. Wobec dowolności x , wszystkie jednoelementowe podzbiory zbioru X są wybrane, co prowadzi do wniosku, że wyróżniono wszystkie niepuste podzbiory zbioru X .

Drugie rozwiązanie zadania 82. Oznaczmy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ przez $\mathcal{R}$, a rodzinę tych wybranych przez $\mathcal{W}$. Rodzina $\mathcal{R}$ z działaniem różnicy symetrycznej

$$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

jest znanym przykładem grupy.

Z warunków zadania wynika, że jeśli $A, B \in \mathcal{W}$, to $A \div B \in \mathcal{W}$. Ponadto $\mathcal{W}$ jest rodziną skończoną, więc $\mathcal{W}$ jest podgrupą $\mathcal{R}$ z działaniem $\div$. Na mocy twierdzenia Lagrange'a liczba $k = |\mathcal{W}|$ jest dzielnikiem liczby $|\mathcal{R}| = 2^n$, a zatem $k \leq 2^{n-1}$, bo z treści zadania $k < 2^n$.

Należy jeszcze podać przykład rodziny $\mathcal{W}$ o 2^{n-1} elementach, tak jak w poprzednim rozwiązaniu.

Rozwiązanie zadania 83. Rozważmy zbiór

$$B = \{1, 2, \dots, n\} \cup \{k-1, k-2, \dots, k-n\}.$$

Jeśli $k = |A| > 2n$, to $|B| = 2n$ i wtedy $|A \cap B| \geq n+1$. Wobec tego istnieje taka liczba $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, że $\{i, k-i\} \subseteq A \cap B \subseteq A$, co jest sprzeczne z warunkami zadania. Z tego wynika, że $k \leq 2n$.

Na koniec zauważmy, że zbiór

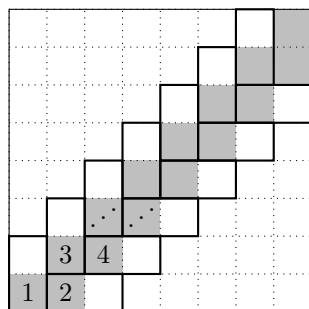
$$A = \{n, n+1, \dots, 2n-1\} \cup \{2n+1, 2n+2, \dots, 3n\}$$

ma dokładnie $2n$ elementów i spełnia wymagane warunki, więc szukaną liczbą jest $k = 2n$.

4.3 Układanki

Rozwiązanie zadania 84. Spróbujmy ułożyć z kostek kwadrat o ustalonym boku w taki sposób, żeby z żadnych dwóch kostek nie był ułożony kwadrat o wymiarach 2×2 .

Jako pierwszą położymy kostkę, która przykrywa lewy dolny narożnik kwadratu; dalsze rozumowanie nie zależy od jej orientacji. Położenie kolejnych zaznaczonych na rysunku kostek jest wymuszone, gdyż muszą one przykrywać zacienione pola o numerach $2, 3, 4, \dots$, a przy tym być ułożone w sposób nie prowadzący do powstania niechcianego kwadratu. Kontynuując dochodzimy wreszcie do prawego górnego narożnika kwadratu, gdzie ułożenie kwadratu 2×2 z kostek jest nieuniknione.



Rozwiązanie zadania 85. Wykażemy, że ta konstrukcja jest możliwa tylko dla n nieparzystych.

Pole takiego prostokąta wynosi

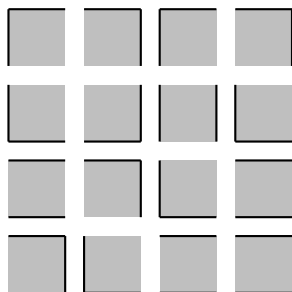
$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

a jeden z boków ma długość co najmniej n . Wobec tego drugi bok ma długość co najwyżej $\frac{n+1}{2}$. W przypadku n parzystych długość ta wynosi najwyżej $\frac{n}{2}$, gdyż jest liczbą naturalną. Wobec tego dla n parzystych zbudowany prostokąt nie może być gruby.

Na rysunku przedstawiamy konstrukcję grubego prostokąta dla n nieparzystych, liczby zapisane na prostokątach to ich długości.

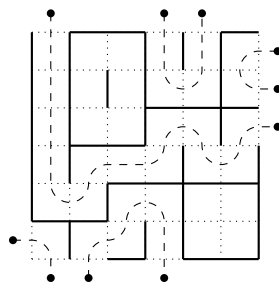
$(n-1)/2$		$(n+1)/2$
...		...
2	$n-2$	
1	$n-1$	
n		

Rozwiązanie zadania 86. Niech b oznacza liczbę białych odcinków jednostkowych na brzegu kwadratu $n \times n$, zaś w – w jego wnętrzu.

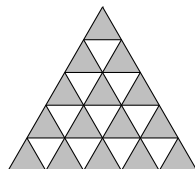


Rozetnijmy wyjściowy kwadrat $n \times n$ na kwadraty jednostkowe, z zachowaniem kolorów na ich brzegach. Wówczas otrzymamy $2n^2$ białych odcinków jednostkowych, wśród których odcinki z brzegu kwadratu $n \times n$ występują jednokrotnie, a te, które były w jego wnętrzu – dwukrotnie. Daje to równość $b + 2w = 2n^2$, z której natychmiast wnioskujemy, że b jest liczbą parzystą.

Drugie rozwiązanie zadania 86. Potraktujmy białe odcinki jako otwarte przejścia pomiędzy kwadratami jednostkowymi, a czarne – jako zablokowane. Utworzymy w ten sposób labirynt, w którym z każdego kwadratu jednostkowego są dokładnie dwa wyjścia, być może prowadzące na zewnątrz labiryntu. Nie ma zatem ślepych zaułków ani rozgałęzień. Wobec tego wyjścia z labiryntu można dobrać w pary tak jak na rysunku obok, więc ich liczba jest parzysta.



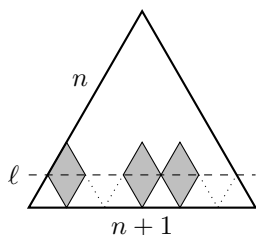
Rozwiązanie zadania 87. Podzielmy dany trójkąt na n^2 trójkątów równobocznych o boku 1 i pokolorujmy je w sposób przedstawiony na rysunku. Każdy z otrzymanych w wyniku podziału rombów jest złożony z jednego trójkąta białego i jednego szarego. Pół szarych jest o n więcej niż białych, więc otrzymano co najmniej n trójkątów.



Drugie rozwiązanie zadania 87. Niech I_0 będzie jednym z n odcinków jednostkowych, tworzących jeden z boków danego trójkąta. Jeśli I_0 jest bokiem pewnego rombu R_1 z podziału, to niech I_1 będzie jego bokiem przeciwnym do I_0 . Dalej dla kolejnych $k = 2, 3, \dots$: jeśli I_k jest wspólnym bokiem rombów R_k i R_{k+1} , to I_{k+1} definiujemy jako bok rombu R_{k+1} przeciwny do I_k . To oczywiście nie może trwać bez końca, więc dla pewnego m (być może $m = 0$) odcinek I_m jest bokiem pewnego trójkąta z podziału.

W ten sposób każdemu z n odcinków jednostkowych, tworzących jeden z boków danego trójkąta, przyporządkowujemy różnowartościowo pewien trójkąt z podziału. To dowodzi, że tych trójkątów jest co najmniej n .

Trzecie rozwiązanie zadania 87. Użyjemy indukcji; teza jest oczywiście prawdziwa dla $n = 1$. Ustalmy $n \geq 1$ i założmy indukcyjnie, że dla każdego zgodnego z regułami podziału trójkąta równobocznego o boku n na romby i trójkąty otrzymamy co najmniej n trójkątów. Rozważmy dowolny podział trójkąta o boku $n+1$. Widoczna na rysunku prosta ℓ oddziela od niego trójkąt o boku n i przechodzi przez wnętrza dokładnie k rombów, $0 \leq k \leq n$.



Na mocy założenia indukcyjnego, nad prostą ℓ znajduje się co najmniej $n - k$ trójkątów z rozważanego podziału. Ponadto każdy z pozostałych do podzielenia trójkątów i trapezów pod prostą ℓ nie może być podzielony na same romby, gdyż składa się z nieparzystej liczby trójkątów jednostkowych. To daje $k+1$ dodatkowych trójkątów, więc łącznie mamy ich co najmniej $n+1$. Dowód indukcyjny jest zatem zakończony.

4.4 Grafy

Rozwiązanie zadania 88. Niech B będzie dowolnym miastem. Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ zbiór tych miast, z których drogi prowadzą do B , a przez $\mathcal{C}$ zbiór tych miast, do których prowadzą drogi z B . Zbiory $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są niepuste, rozłączne oraz ich suma zawiera wszystkie miasta oprócz B . Ponieważ można dojechać z każdego miasta do każdego, istnieje bezpośrednia droga z pewnego miasta $C \in \mathcal{C}$ do pewnego miasta $A \in \mathcal{A}$. Wtedy miasta A, B, C tworzą trójkąt.

Rozwiązanie zadania 89. Nazwijmy ciąg graczy $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ *cyklem*, jeśli gracz A_i wygrał z A_{i+1} dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ oraz gracz A_n wygrał z A_1 . Ustalmy $n > 4$ oraz założmy indukcyjnie, że jeśli $k < n$ i $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ jest cyklem, to $3 \mid k$. Rozważmy cykl $(A_1, A_2, \dots, A_n)$. Gracz A_{n-3} przegrał z A_{n-1} , który przegrał z A_1 , więc gracz A_{n-3} wygrał z A_1 . Mamy więc cykl $(A_1, A_2, \dots, A_{n-3})$. Na mocy założenia indukcyjnego $3 \mid n-3$, zatem również $3 \mid n$, co kończy krok indukcyjny.

Aby indukcja wystartowała, trzeba rozważyć wszystkie $n \leq 4$. Dla $n \leq 3$ teza zachodzi, gdyż jedyną możliwością jest wtedy $n = 3$. Pozostaje zauważyć, że (A_1, A_2, A_3, A_4) nie jest cyklem, gdyż w przeciwnym razie gracz A_1 musiałby jednocześnie przegrać i wygrać z A_3 .

Rozwiązanie zadania 90. Nazwijmy *dystansem* pomiędzy dwoma obozowiczami X i Y najmniejszą liczbę $d = d(X, Y)$, dla której na początku obozu można wskazać taki ciąg uczniów $(A_0, A_1, \dots, A_d)$, że każde dwa jego sąsiednie wyrazy są znajomymi oraz $A_0 = X$ i $A_d = Y$. Jeśli taki ciąg nie istnieje, to wówczas stosujemy konwencję $d(X, Y) = \infty$.

Udowodnimy indukcyjnie, że po k dniach uczestnicy X i Y znają się wtedy i tylko wtedy, gdy $d(X, Y) \leq 2^k$. Dla $k = 0$ (początek obozu) wynika to wprost z definicji dystansu. Jest to baza indukcji.

Przypuśćmy, że teza zachodzi dla pewnego ustalonego $k \geq 0$. Jeśli X i Y są znajomymi po $k+1$ dniach, to albo znali się już po k dniach (wtedy z założenia indukcyjnego $d(X, Y) \leq 2^k \leq 2^{k+1}$), albo poznali się w dniu $k+1$ – w tym wypadku po k -tym wieczorku mieli wspólnego znajomego Z , dzięki któremu się poznali. Wówczas z założenia indukcyjnego

$$d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y) \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

W drugą stronę, jeżeli $d(X, Y) > 2^{k+1}$, to na mocy założenia indukcyjnego X i Y nie znają się po k -tym wieczorku. Dla każdego uczestnika U zachodzą nierówności

$$d(X, U) + d(U, Y) \geq d(X, Y) > 2^{k+1},$$

więc $d(X, U) > 2^k$ lub $d(U, Y) > 2^k$, czyli U nie zna X lub nie zna Y . Z tego wynika, że X i Y nie zapoznają się na wieczorku $k+1$.

Niech D oznacza największy dystans pomiędzy uczestnikami obozu. Jeśli $D = \infty$, to obóz nigdy się nie skończy. W przeciwnym razie obóz potrwa $\lceil \log_2 D \rceil$ dni.

Największe możliwe skończone D jest równe $n - 1$ – gdy wszystkich uczestników obozu można ustawić w ciąg, w którym znajdują się jedynie uczestnicy sąsiadujący. Wtedy obóz potrwa $\lceil \log_2(n - 1) \rceil$ dni.

4.5 Niezmienniki i półniezmienniki

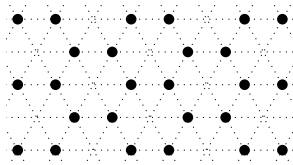
Rozwiązanie zadania 91. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że na tablicy nie pozostała żadna jedynka i nie można dalej wykonywać operacji opisanej w zadaniu. W takim wypadku na tablicy widnieje dokładnie jedna liczba naturalna i jest ona większa od 1. Na mocy nierówności

$$\frac{1}{\lfloor ab/(a+b) \rfloor} \geq \frac{1}{ab/(a+b)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

wnioskujemy, że suma odwrotności liczb napisanych na tablicy w żadnym kroku nie może zmaleć. Na początku ta suma była mniejsza od $\frac{1}{2}$, a na końcu wynosi najwyżej $\frac{1}{2}$ – sprzeczność.

Rozwiązanie zadania 92. Udowodnimy, że nie można zgodnie z regułami zadania zgasić wszystkich żarówek, zaczynając od sytuacji, w której świeci się dokładnie jedna z nich. Jest to równoważne tezie zadania.

W tym celu wyróżnimy niektóre z żarówek – zaznaczone na rysunku.



Zróbmy to w ten sposób, by jedyna świecąca żarówka była wyróżniona. Uruchomienie dowolnego włącznika zmienia stan dokładnie dwóch wyróżnionych żarówek. W takim razie liczba świejących żarówek, które są wyróżnione, pozostaje nieparzysta. To dowodzi, że nie można zgasić wszystkich żarówek.

Rozdział 5

Zadania z kosmosu

Rozwiązanie zadania 93. Niech A oznacza zbiór tych $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, dla których na k -tej karcie znajduje się przynajmniej jeden zbiór, który nie zawiera k . Zbiór A znajduje się na jednej z kart, niech będzie to karta o numerze a . Jeśli $a \notin A$, to na a -tej karcie nie ma zbiorów niezawierających a , czyli nie ma tam zbioru A – sprzeczność. W takim razie $a \in A$. Z określenia zbioru A wynika, że na a -tej karcie znajduje się przynajmniej jeden zbiór, który nie zawiera a . Na tej samej karcie jest zbiór A , który zawiera a , więc dowód jest zakończony.

Komentarz. To rozumowanie można przeprowadzić także dla dowolnego, niekoniecznie skończonego zbioru X . Każdemu podzbiorowi zbioru X przypisujemy pewien element zbioru X (w zadaniu był to numer karty, na której ten podzbiór zapisano). Z tezy zadania wnioskujemy, że pewnym dwóm podzbiorem przypisany jest ten sam element, więc nie ma bijekcji pomiędzy zbiorem X i zbiorem jego podzbiorów. Jest to słynne twierdzenie Cantora.

Drugie rozwiązanie zadania 93. Niech $T(n)$ oznacza tezę zadania dla pewnej ustalonej liczby całkowitej dodatniej n . Dla $n = 1$ teza jest oczywista, bo mamy tylko kartę z numerem 1, zbiór $\{1\}$ zawierający 1 i zbiór $\emptyset$, który nie zawiera 1.

Ustalmy $n \geq 1$ i założmy indukcyjnie, że zachodzi $T(n)$. Wykażemy prawdziwość $T(n+1)$. Jeśli na karcie o numerze $n+1$ znajduje się zbiór zawierający $n+1$ i zbiór niezawierający $n+1$, to teza zachodzi. W przeciwnym razie są dwie możliwości: wszystkie podzbiory zbioru $\{1, 2, \dots, n+1\}$ niezawierające $n+1$ znajdują się na kartach od 1 do n lub wszystkie podzbiory zbioru $\{1, 2, \dots, n+1\}$ zawierające $n+1$ znajdują się na kartach od 1 do n . W obu przypadkach teza wynika bezpośrednio z założenia indukcyjnego, gdyż obecność lub nieobecność elementu $n+1$ nie jest istotna na kartach o numerach od 1 do n .

Rozwiązanie zadania 94. Dla $k = 1, 2, \dots, n$ zachodzi równość

$$\frac{1}{a^k} + \frac{1}{a^{2k}} + \frac{1}{a^{3k}} + \dots = \frac{1}{a^{k-1}}.$$

Oznaczmy sumę po lewej stronie przez S_k . Wyraz $\frac{1}{a^m}$ występuje w sumie S_k tylko wtedy, gdy $k \mid m$. To oznacza, że w wyrażeniu $S_1 + \dots + S_n$ składnik $\frac{1}{a^m}$ występuje tyle razy, ile dzielników nieprzekraczających n ma liczba m . Oznaczmy tę liczbę przez $d'(m)$. Mamy zatem

$$\frac{1}{a^{1-1}} + \dots + \frac{1}{a^{n-1}} = S_1 + \dots + S_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d'(m)}{a^m} > \sum_{m=1}^n \frac{d'(m)}{a^m} = \sum_{m=1}^n \frac{d(m)}{a^m}.$$

Rozwiązanie zadania 95. Prosta indukcja pokazuje, że $0 < a_n < 1$ dla wszystkich n . Zależność rekurencyjna z zadania jest równoważna równości

$$a_k^2 = \left(\frac{1}{a_{k+1}} - 1 \right) / \left(\frac{1}{a_k} - 1 \right).$$

Mnożąc ją stronami dla $k = 1, 2, \dots, n$, otrzymamy

$$(a_1 \dots a_n)^2 = \left(\frac{1}{a_{n+1}} - 1 \right) / \left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) = \frac{1}{a_{n+1}} - 1.$$

Ciąg (b) określamy w taki sposób, by $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = (a_1 a_2 \dots a_n)^2$. Na mocy warunków zadania, dla $n \geq 2$ zachodzą równości

$$b_{n-1} + \frac{1}{b_{n-1}} = \frac{a_n}{1 - a_n} + \frac{1 - a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n - a_n^2} - 2 = \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} - 1} - 2 = b_n - 2.$$

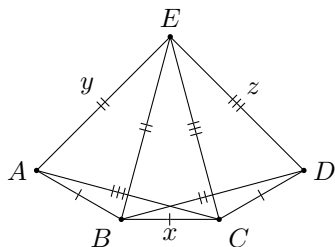
Wobec tego $b_n > b_{n-1} + 2$ dla $n \geq 2$. Rozpoczynając od $b_1 = 4$, otrzymamy indukcyjnie $b_n > 2n$, co jest równoważne tezie zadania.

Rozwiązanie zadania 96. Przyjmijmy oznaczenia

$$x = |AB|, \quad y = |AE|, \quad z = |AC|, \quad \varphi = |\sphericalangle BAC|, \quad \psi = |\sphericalangle CAE|.$$

Wówczas

$$\frac{x}{2y} = \cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi = \frac{z}{2x} \cdot \frac{y}{2z} - \sqrt{1 - \frac{z^2}{4x^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{4z^2}},$$



a po przekształceniach $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} = 5$. W analogiczny sposób dla $\sphericalangle BDC$ i $\sphericalangle BDE$ otrzymamy $\frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} = 5$. Odejmując te równania stronami, po kolejnych przekształceniach dostaniemy równość

$$\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{z^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{x^2}\right) = 0,$$

z której wynika, że pewne dwie spośród liczb x, y, z są równe.

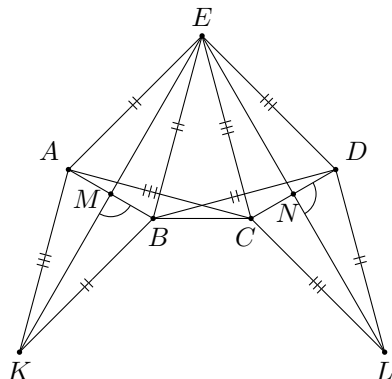
Jeśli $x = y$, to punkty B i E leżą na symetralnej odcinka CD , ale wtedy pięciokąt $ABCDE$ nie może być wypukły. Podobną sprzeczność uzyskamy dla $x = z$. Stąd wnioskujemy, że $y = z$. Wówczas trójkąty ACE i BDE są równoboczne, a trójkąty AEB , BEC i CED są równoramienne i przystające. Po prostych rachunkach wyznaczamy miary kątów pięciokąta:

$$|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle CDE| = 75^\circ, \quad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCD| = 150^\circ, \quad |\sphericalangle DEA| = 90^\circ.$$

Drugie rozwiązanie zadania 96. Obróćmy trójkąt BCE wokół punktu B w ten sposób, by otrzymać trójkąt BAK oraz wokół punktu C , by otrzymać trójkąt DCL . Trójkąty ABC i KBE są podobne (bkb), analogicznie trójkąty BCD i ECL . Z tego wynikają równości

$$|EK| = \frac{|EB| \cdot |AC|}{|BC|} = \frac{|BD| \cdot |EC|}{|BC|} = |EL|,$$

więc trójkąty AKE i DEL są przystające (bbb).



Niech M i N będą środkami odcinków odpowiednio AB i CD . Zachodzi równość $|KM| = |LN|$, ponadto $|\sphericalangle BME| = |\sphericalangle DNE| = 90^\circ$, a także $|\sphericalangle DNL| = |\sphericalangle BMK|$. Z tego wynika, że trójkąty EKM i ELN (być może zdegenerowane) są przystające na mocy cechy przystawania trójkątów rozwartokątnych (bbk). Stąd $|EM| = |EN|$, a zatem $|EB| = |EC|$ i dalej postępujemy jak w poprzednim rozwiązaniu.

Rozwiązanie zadania 97. Z nierówności $(x_{i-1} + x_i + x_{i+1} - 2)^2 \geq 0$ mamy $x_{i-1}^2 + x_i^2 + x_{i+1}^2 + 2x_i x_{i-1} + 2x_i x_{i+1} + 2x_{i-1} x_{i+1} + 4 \geq 4x_{i-1} + 4x_i + 4x_{i+1}$, co jest równoważne nierówności

$$x_{i-1}^2 - x_i^2 + x_{i+1}^2 + 8y_i + 4 \geq 4x_{i-1} + 4x_i + 4x_{i+1}.$$

Dla $x \in [0, 1]$ zachodzi nierówność $x^2 \leq x$, więc

$$x_{i-1}^2 - x_i^2 + 8y_i + 4 \geq 4x_{i-1} + 4x_i + 3x_{i+1}.$$

Sumując ostatnią nierówność dla $i = 1, 2, \dots, n$, a następnie dzieląc obie strony przez n , otrzymamy tezę.

Rozwiązanie zadania 98. Najpierw wykażemy indukcyjnie względem n następujące stwierdzenie:

(A) Dla każdego $x > 1$ zachodzi nierówność $f(x) > (x-1)/\sqrt[n]{x-1}$.

W przypadku $n = 0$ nierówność $f(x) = \sqrt{1 + (x-1)f(x+1)} > 1$ zachodzi, gdyż z założeń $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \geq 1$. Załóżmy prawdziwość stwierdzenia (A) dla pewnego ustalonego $n \geq 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 + (x-1)f(x+1)} > \sqrt{(x-1)f(x+1)} > \sqrt{(x-1)x/\sqrt[n]{x-1}} \\ &> \sqrt{(x-1)^2/\sqrt[n]{x-1}} = (x-1)/\sqrt[n+1]{x-1}, \end{aligned}$$

co kończy krok indukcyjny.

Przechodząc do granicy, dla każdego $x > 1$ otrzymamy

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1)/\sqrt[n]{x-1} = x-1.$$

Jest jasne, że dla $x = 1$ ta nierówność także jest spełniona.

Teraz wykażemy, znów przez indukcję względem n , że:

(B) Dla wszystkich $x \geq 1$ zachodzi nierówność $f(x) \geq x - \frac{1}{2^n}$.

Indukcja startuje od $n = 0$, czyli od przed chwilą wykazanej nierówności $f(x) \geq x - 1$. Załóżmy prawdziwość stwierdzenia (B) dla pewnego ustalonego $n \geq 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 + (x-1)f(x+1)} \geq \sqrt{1 + (x-1)\left(x+1 - \frac{1}{2^n}\right)} \\ &= \sqrt{x^2 - \frac{x}{2^n} + \frac{1}{2^n}} > \sqrt{x^2 - 2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}}} = x - \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Znów przechodząc do granicy, otrzymujemy

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{2^n}\right) = x,$$

co kończy dowód.

Komentarz. Jeżeli dodatkowo założyć, że istnieje taka stała c , że $f(x) \leq cx$ dla wszystkich $x \geq 1$, to można udowodnić podobnymi metodami, że funkcja z zadania spełnia nierówność $f(x) \leq x$ dla $x \geq 1$, czyli po prostu $f(x) = x$. Wnioskiem z tego jest między innymi równość

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}} = 3,$$

którą, rozumując w ten sposób, udowodnił słynny indyjski matematyk, Srinivasa Ramanujan.

Rozwiązanie zadania 99. Oprzemy się na następującym lemacie.

Lemat. Niech X i Y będą zbiorami skończonymi i niech $f: X \rightarrow Y$. Wtedy istnieje przynajmniej $|X|^2/|Y|$ par uporządkowanych (x_1, x_2) elementów zbioru X , dla których $f(x_1) = f(x_2)$.

Dowód lematu. Niech $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Przez k_i oznaczmy liczbę tych $x \in X$, dla których $f(x) = y_i$. Wtedy $|X| = k_1 + k_2 + \dots + k_m$. Liczba rozważanych par wynosi dokładnie $k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$, co na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową jest nie mniejsze niż $|X|^2/|Y|$.

Wracając do rozwiązania zadania, określmy funkcję f na zbiorze $A \times A$ wzorem

$$f(a, b) = ((a \star b), (b \star a)).$$

Niech B będzie zbiorem wartości funkcji f na zbiorze $A \times A$, natomiast C – zbiorem wartości funkcji f na zbiorze B . Z warunków zadania wynika, że

$$f(f(a, b)) = f((a \star b), (b \star a)) = ((a \star b) \star (b \star a), (b \star a) \star (a \star b)) = (c, c)$$

dla pewnego $c \in A$. Z tego wnioskujemy, że $|C| \leq n$. Zastosujmy udowodniony wcześniej lemat do funkcji $f: A \times A \rightarrow B$ oraz $f: B \rightarrow C$. Wnioskujemy, że istnieje przynajmniej $|A|^4/|B|$ i odpowiednio przynajmniej $|B|^2/|C|$ par $((a, b), (c, d))$ – równoważnie: czwórek (a, b, c, d) – dla których zachodzi równość $f(a, b) = f(c, d)$. Pozostaje zauważyć, że

$$\left(\max \left\{ \frac{|A|^4}{|B|}, \frac{|B|^2}{|C|} \right\}\right)^3 \geq \left(\frac{|A|^4}{|B|}\right)^2 \cdot \frac{|B|^2}{|C|} = \frac{|A|^8}{|C|} \geq \frac{n^8}{n} = n^7,$$

oraz że stwierdzenie $f(a, b) = f(c, d)$ jest równoważne temu, że zachodzą jednocześnie warunki $a \star b = c \star d$ i $b \star a = d \star c$.

Rozwiązanie zadania 100. Dla $|A| = 1$ teza jest trywialna, niech więc $|A| > 1$. Jeżeli wszystkie elementy zbioru A powiększymy o pewną stałą lub pomnożymy przez pewną niezerową stałą, to liczby elementów zbiorów A_n nie zmieniają się. Możemy zatem założyć, że $\min A = 0$ oraz $\text{NWD}(A) = 1$.

Zbiór tych liczb naturalnych, których nie da się zapisać za pomocą sumy pewnej liczby niekoniecznie różnych elementów zbioru A jest wtedy skończony. Oznaczmy ten zbiór przez X . Elementy zbioru A_{n+1} powstają z dodawania parami elementów zbiorów A_n i A , w szczególności $A_n \subseteq A_{n+1}$, gdyż $0 \in A$. Niech $m = \max A$ i $x = \max X$. Dla odpowiednio dużego n_0 mamy więc

$$\{0, 1, 2, \dots, x\} \setminus X \subset A_{n_0} \quad \text{i} \quad x+1, x+2, \dots, x+m \in A_{n_0}.$$

Indukcyjnie dowodzimy, że dla naturalnych t mamy

$$\{0, 1, 2, \dots, x\} \setminus X \subset A_{n_0+t} \quad \text{i} \quad x+1, x+2, \dots, x+(t+1)m \in A_{n_0+t}.$$

Dla dużych $n = n_0 + t$ – powiedzmy dla $n > N$ – zachodzi nierówność

$$x + (t+1)m > \frac{1}{2}(n_0 + t)m = \frac{1}{2} \max A_n.$$

Oznacza to, że dla $n > N$ jedynymi liczbami naturalnymi mniejszymi od $\frac{1}{2} \max A_n$ i nienależącymi do A_n są elementy zbioru X .

Rozważmy teraz zbiór $B = \{m - a : a \in A\}$ i utwórzmy ciąg zbiorów (B_n) analogiczny do ciągu (A_n) , ale dla zbioru B . Jest jasne, że $0 \in B$ i $\text{NWD}(B) = 1$. Rozumując analogicznie jak dla zbioru A , dochodzimy do wniosku, że dla odpowiednio dużych n – powiedzmy $n > N'$ – jedynymi liczbami naturalnymi mniejszymi od $\frac{1}{2} \max B_n$ i nienależącymi do B_n są elementy zbioru Y , który definiujemy analogicznie do zbioru X .

Ponieważ $B_n = \{mn - \alpha : \alpha \in A_n\}$, wnioskujemy, że dla $n > \max\{N, N'\}$ do zbioru A_n należą liczby $0, 1, 2, \dots, mn$ z następującymi wyjątkami: elementami zbioru X oraz liczbami postaci $mn - \gamma$ przy $\gamma \in Y$. W takim razie

$$|A_n| = mn - |X| - |Y| \text{ dla } n > \max\{N, N'\}.$$

To oznacza, że dla takich n zachodzi równość $r_n = m$, czyli ciąg (r) jest od pewnego miejsca stały.

Komentarz. Zamiast $A \subseteq Z$ możemy rozważyć $A \subseteq G$ dla dowolnej grupy przemiennej G i utworzyć odpowiedni ciąg zbiorów, jak w zadaniu. Wtedy istnieje taki wielomian $P(n)$, że $|A_n| = P(n)$ dla wszystkich dostatecznie dużych n . Twierdzenie to pochodzi od rosyjsko-kanadyjskiego matematyka, Askolda Chowańskiego.

