XVI

Wielkopolska Liga Matematyczna

kategoria

SENIOR

ZESTAW **III**

Zadanie S3–N. Liczby całkowite $a > b > 0$ spełniają następujące podzielności: $a \mid b^2$ i $b \mid a^2$. Udowodnić, że $ab \leqslant (a-b)^3$.

Zadanie S3–A. Wyznaczyć liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1^2 &= x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} \\ x_2^2 &= x_3 + x_4 + \ldots + x_{10} + x_1 \\ x_3^2 &= x_4 + x_5 + \ldots + x_{10} + x_1 + x_2 \\ & \vdots \\ x_9^2 &= x_{10} + x_1 + x_2 + \ldots + x_8 \\ x_{10}^2 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_9 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{10}$.

Zadanie S3–G. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt P leży na półprostej $AB^{\rightarrow}$ i spełnia warunek $2|AP| = |AB| + |AC|$. Dowieść, że

$$|\sphericalangle API| \leqslant 45^\circ - \tfrac{1}{4}|\sphericalangle BAC|.$$

Zadanie S3–C. Przez *towarzystwo* będziemy rozumieć zbiór prostokątów, dla którego istnieje taka prosta ℓ, że każdy z tych prostokątów ma bok całkowicie zawarty w prostej ℓ. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n o następującej własności: Można tak podzielić płaszczyznę na prostokąty, żeby w każdym towarzystwie było co najwyżej n prostokątów.

Rozwiązania powyższych zadań należy przesłać za pośrednictwem strony internetowej

wlm.wmi.amu.edu.pl

w terminie do

31 marca 2025 r., godz. 20:00.

Prace powinny być **w formacie PDF**. Akceptowane są skany rozwiązań napisanych ręcznie i rozwiązania zredagowane na komputerze.

Przed wysłaniem rozwiązań zadań prosimy zapoznać się z regulaminem dostępnym na wyżej wymienionej stronie internetowej.