XVI

Wielkopolska Liga Matematyczna

kategoria

W E T E R A N

Z E S T A W **III**

Zadanie W3–N. Liczby a, b oraz n są całkowite dodatnie. Udowodnić, że jeśli

$$n^2 + 2a^2 \quad \text{i} \quad n^2 + 2b^2$$

są kwadratami liczb naturalnych, to $a + b \neq n$.

Zadanie W3–A. Nieskończony ciąg $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ spełnia warunek

$$a_{n+1} = \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \quad \text{dla wszystkich } n \geqslant 1.$$

Wykazać, że istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której $a_n < \frac{1}{2}n$.

Zadanie W3–G. Siedmiokąt $ABCDEFG$ wpisany jest w okrąg. Jego przekątne AD, BE i CG przecinają się w punkcie X, a przekątne AE, BF, DG – w punkcie Y. Dowieść, że proste DE, CF, XY mają punkt wspólny bądź są równoległe.

Zadanie W3–C. Liczby naturalne $k, n \geqslant 2$ spełniają warunek:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant k.$$

Dowieść, że zbiór $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$ można podzielić na $k+1$ zbiorów, w taki sposób, że w każdym z nich suma elementów nie przekracza 1.

Rozwiązania powyższych zadań należy przesłać za pośrednictwem strony internetowej

wlm.wmi.amu.edu.pl

w terminie do

31 marca 2025 r., godz. 20:00.

Prace powinny być **w formacie PDF**. Akceptowane są skany rozwiązań napisanych ręcznie i rozwiązania zredagowane na komputerze.

Przed wysłaniem rozwiązań zadań prosimy zapoznać się z regulaminem dostępnym na wyżej wymienionej stronie internetowej.