



XVII

Wielkopolska
Liga
Matematyczna

kategoria

W E T E R A N

Z E S T A W III

Zadanie W3N. Ustalmy liczbę pierwszą $p \geq 5$ oraz wielomian f o współczynnikach całkowitych. Nazwijmy *zwykłymi* wszystkie reszty $r \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ z dzielenia przez p , które spełniają warunek:

Dla pewnych całkowitych $x \neq y$ liczba $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ daje resztę r z dzielenia przez p .

Pozostałe reszty z dzielenia przez p nazwiemy *wyjątkowymi*. Dowieść, że jeśli przynajmniej dwie reszty są wyjątkowe, to liczba

$$f(1)^2 + f(2)^2 + \dots + f(p)^2$$

dzieli się przez p .

Zadanie W3A. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, która spełniałaby równość

$$f(x) = f(f(x)) + x$$

dla wszystkich całkowitych x .

Zadanie W3G. Trójkąt ABC jest ostrokątny. Punkty A' , B' i C' są spodkami jego wysokości poprowadzonych, odpowiednio, z wierzchołków A , B i C , przy czym $|BA'| = 3|CA'|$. Okrąg ω , opisany na trójkącie $AB'C'$, przecina odcinek $A'C'$ w punkcie $P \neq C'$. Dowieść, że prosta CP jest styczna do okręgu ω .

Zadanie W3C. Tablicę kwadratową $n \times n$ nazwiemy *kwadratem antymagicznym*, jeśli w każdym jej polu jest liczba -1 , 0 lub 1 oraz suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest inna (łącznie jest $2n$ różnych sum). Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których istnieje antymagiczny kwadrat $n \times n$.

Rozwiązania powyższych zadań należy przesłać za pośrednictwem strony internetowej

wlm.wmi.amu.edu.pl

w terminie do

31 marca 2026 r., godz. 20:00.

Prace powinny być w **formacie PDF**. Akceptowane są skany rozwiązań napisanych ręcznie i rozwiązania zredagowane na komputerze.

Przed wysłaniem rozwiązań zadań prosimy **zapoznać się z regulaminem** dostępnym na wyżej wymienionej stronie internetowej.
