Wielkopolska
Liga
Matematyczna

IX W L M – Z E S T A W **C**

C1. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że wśród dowolnie wybranych $3n$ punktów płaszczyzny o obu współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ można wskazać takie cztery różne punkty A, B, C i D, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

C2. Trzy cięciwy pewnego okręgu przecinają się w punkcie P różnym od jego środka O, każde dwie pod kątem $60°$. Dowieść, że środki tych cięciw są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

C3. Niech $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych oraz niech $Q(x) = P(P(x))$. Udowodnić, że jeśli P posiada pierwiastek rzeczywisty dodatni, to Q również posiada pierwiastek rzeczywisty dodatni.

C4. Okrąg o jest częścią wspólną sfer s_1 i s_2. Trzy różne punkty A, B i C leżą na okręgu o, a punkt P leży na zewnątrz sfer s_1 i s_2. Prosta PA przecina sfery s_1 i s_2 w punktach odpowiednio $A_1 \neq A$ i $A_2 \neq A$. Prosta PB przecina sfery s_1 i s_2 w punktach odpowiednio $B_1 \neq B$ i $B_2 \neq B$. Prosta PC przecina sfery s_1 i s_2 w punktach odpowiednio $C_1 \neq C$ i $C_2 \neq C$. Dowieść, że płaszczyzny $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są równoległe.

C5. Niech $d(k)$ oznacza ilość dzielników liczby naturalnej k. Ustalmy liczbę rzeczywistą $a > 1$. Dowieść, że

$$\frac{d(1)}{a^1} + \frac{d(2)}{a^2} + \frac{d(3)}{a^3} + \ldots + \frac{d(n)}{a^n} < \frac{1}{a^1 - 1} + \frac{1}{a^2 - 1} + \frac{1}{a^3 - 1} + \ldots + \frac{1}{a^n - 1}$$

dla wszystkich naturalnych $n \geqslant 1$.

Rozwiązania powyższych zadań należy przesłać listem poleconym na adres:

Wielkopolska Liga Matematyczna
(dr Bartłomiej Bzdęga)
Collegium Mathematicum
ul. Umultowska 87
61-614 Poznań

w terminie do

31 marca 2018r.

(decyduje data stempla pocztowego).

Wszystkie nadesłane przez uczestnika rozwiązania powinny być zapisane na oddzielnych kartkach formatu A4, zapisanych po jednej stronie. W lewym, górnym narożniku każdego arkusza uczestnik wpisuje swoje imię i nazwisko oraz nazwę szkoły i klasy. Warto podać również swój adres e-mail.
Przed wysłaniem rozwiązań zadań prosimy zapoznać się z Regulaminem dostępnym na stronie WLM.
Wszelkie informacje o Wielkopolskiej Lidze Matematycznej, w tym treści zadań oraz aktualny ranking uczestników, można znaleźć pod adresem

wlm.wmi.amu.edu.pl