Wielkopolska
Liga
Matematyczna

X WLM – ZESTAW C

C1. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} \;+\; \sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{d^2+a^2} \;\geqslant\; (a+c)(b+d).$$

C2. Niech $d(n)$ oznacza liczbę dzielników n, a $k(n)$ – liczbę tych dzielników n, które są kwadratami liczb naturalnych. Wykazać, że dla każdego całkowitego $r \geqslant 1$ istnieje liczba naturalna n, spełniająca równość $d(n) = r \cdot k(n)$.

C3. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg styczny do odcinków BC i AC przecina odcinek AB w punktach K i L. Wykazać, że

$$\Big||AK|-|BL|\Big| \leqslant \Big||AC|-|BC|\Big|.$$

C4. Dany jest wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych i pewien zbiór A liczb naturalnych większych od 1. Powiemy, że zbiór A *pokrywa* wielomian $P(x)$, jeżeli dla każdego całkowitego n liczba $P(n)$ jest wielokrotnością pewnego elementu zbioru A. Dowieść, że jeżeli dany wielomian można pokryć zbiorem skończonym, to można go pokryć zbiorem jednoelementowym.

C5. Niech A będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n przez A_n oznaczmy zbiór tych liczb, które da się zapisać w postaci sumy $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, gdzie $a_1, \ldots, a_n \in A$ są niekoniecznie różne. Niech $r_n = |A_{n+1}| - |A_n|$. Dowieść, że ciąg (r) jest od pewnego miejsca stały.

Rozwiązania powyższych zadań należy przesłać listem poleconym na adres:

Wielkopolska Liga Matematyczna
(dr Bartłomiej Bzdęga)
Collegium Mathematicum
ul. Umultowska 87
61-614 Poznań

w terminie do

31 marca 2019 r.

(decyduje data stempla pocztowego).

Wszystkie nadesłane przez uczestnika rozwiązania powinny być zapisane na oddzielnych kartkach formatu A4, zapisanych po jednej stronie. W lewym, górnym narożniku każdego arkusza uczestnik wpisuje swoje imię i nazwisko oraz nazwę szkoły i klasy. Warto podać również swój adres e-mail.
Przed wysłaniem rozwiązań zadań prosimy zapoznać się z regulaminem dostępnym na stronie WLM.
Wszelkie informacje o Wielkopolskiej Lidze Matematycznej, w tym treści zadań oraz aktualny ranking uczestników, można znaleźć pod adresem

wlm.wmi.amu.edu.pl