ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

# I Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2010r.

# Organizacja konkursu

Wielkopolska Liga Matematyczna odbyła się po raz pierwszy w roku szkolnym 2009/2010. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Odbywały się w okresie od marca do maja 2010r.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez plakaty rozwieszone w szkołach oraz kontakt z dyrekcjami. Źródłem aktualnych informacji o konkursie pozostaje, w myśl regulaminu, strona internetowa *www.astagor.net/wlm*.

W konkursie wzięło udział 44 uczniów szkół średnich oraz 4 gimnazjalistów. Uczniowie rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca marca 2010r., zestaw B do końca kwietnia 2010r., zestaw C do końca maja 2010r. Każdy zestaw liczył 4 zadania, po jednym z każdego z działów: algebra z analizą, kombinatoryka, geometria, teoria liczb. Rozwiązania zadań oceniane były przez Komisję WLM w skali od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów, na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie I WLM odbyło się 11 czerwca 2010r., na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Po omówieniu rozwiązań zadań, uczestnicy, którzy wypadli najlepiej, otrzymali nagrody książkowe.

Wszyscy obecni na zakończeniu zostali zaproszeni na wykład dra Jerzego Grzybowskiego *Kafelkowanie płaszczyzny i cegiełkowanie przestrzeni* oraz wykład dra Marka Grajka *Roots of Victory* wygłoszony z okazji X Środkowoeuropejskiej Konferencji nt. Kryptologii.

# Komisja WLM

Przewodniczący

- prof. dr hab. Krzysztof Pawałowski

Członkowie

- dr Małgorzata Bednarska–Bzdęga
- mgr Joanna Berlińska
- mgr Bartłomiej Bzdęga
- mgr Bartosz Naskręcki

# Wyniki konkursu

Komisja WLM postanowiła przyznać jedną nagrodę stopnia pierwszego, 2 nagrody stopnia drugiego, 5 nagród stopnia trzeciego oraz 5 wyróżnień.

### Nagroda I stopnia

Jędrzej Garnek (117 pkt.)
Uczeń 2 klasy VII Liceum Ogólnokształcącego im. Dąbrówki w Poznaniu.

### Nagrody II stopnia

Łukasz Nizio (99 pkt.)
Uczeń 2 klasy Liceum Ogólnokształcącego w Tarnowie Podgórnym.

Piotr Mizerka (94 pkt.)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

### Nagrody III stopnia

Honorata Franek (78 pkt.)
Uczennica 2 klasy Liceum Ogólnokształcącego im. Marii Skłodowskiej–Curie w Wolsztynie.

Adam Szczepański (66 pkt.)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Sebastian Delekta (58 pkt.)
Uczeń 1 klasy II Liceum Ogólnokształcącego im. Generałowej Zamoyskiej i Heleny Modrzejewskiej w Poznaniu.

Agnieszka Szmyt (58 pkt.)
Uczennica 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Katarzyna Świątek (55 pkt.)
Uczennica 1 klasy II Liceum Ogólnokształcącego im. Generałowej Zamoyskiej i Heleny Modrzejewskiej w Poznaniu.

### Wyróżnienia

Aleksandra Pidde (47 pkt.)
Uczennica 3 klasy I Liceum Ogólnokształcącego im. Karola Marcinkowskiego w Poznaniu.

Paweł Bugajny (46 pkt.)
Uczeń 3 klasy Liceum Ogólnokształcącego im. Kazimierza Wielkiego w Kole.

Marcin Michalski (45 pkt.)
Uczeń 2 klasy II Liceum Ogólnokształcącego im. Krzysztofa Kamila Baczyńskiego w Koninie.

Sylwester Swat (44 pkt.)
Uczeń 1 klasy I Liceum Ogólnokształcącego im. Karola Marcinkowskiego w Poznaniu.

Paweł Piasecki (41 pkt.)
Uczeń 1 klasy I Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Jarocinie.

# Treści zadań

### Zestaw A

**A1.** Ciąg $(a)$ liczb całkowitych dodatnich spełnia dla każdego $n$ całkowitego dodatniego warunki

$$a_{2n} = 3a_n - 1, \qquad a_{2n+1} = 3a_n + 1.$$

Wykazać, że ciąg ten jest ściśle rosnący.

**A2.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ spełniony jest warunek $AB = BC + DA$. Dwusieczne kątów $ABC$ i $DAB$ przecinają się w punkcie $P$. Udowodnić, że $CP = DP$.

**A3.** Niech $n$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Trójkąt równoboczny o boku $n$ rozcięto na $t$ trójkątów równobocznych o boku 1 oraz pewną liczbę rombów o boku 1 i kącie ostrym $60^\circ$. Udowodnić, że $t \geqslant n$.

**A4.** Liczby $a, b, c$ są całkowite dodatnie, przy czym $a^2 + b^2 = c^2$. Dowieść, że liczba $c^2 + \frac{2}{3}ab$ jest całkowita i złożona.

### Zestaw B

**B1.** Z kostek domina o wymiarach $2 \times 1$ ułożono kwadrat. Udowodnić, że z pewnych dwóch kostkek ułożony jest kwadrat o wymiarach $2 \times 2$.

**B2.** Liczby $m$ i $n$ są względnie pierwsze. Wykazać, że równanie

$$a^n + b^n = c^m$$

posiada nieskończenie wiele rozwiązań w trójkach $(a, b, c)$ liczb całkowitych dodatnich.

**B3.** Dany jest trójmian kwadratowy $T(x) = x^2 + 4x + 2$. Dla liczby całkowitej dodatniej $n$ definiujemy

$$P_n(x) = T(T(\ldots T(x)\ldots))$$

(we wzorze $T$ występuje $n$ razy). W zależności od $n$ wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $x$, spełniające równanie $P_n(x) = 0$.

**B4.** Na boku $AC$ trójkąta $ABC$ wybrano punkt $Q$. Punkt $P$ jest środkiem odcinka $BC$. Odcinki $AP$ i $BQ$ przecinają się w punkcie $T$. Punkt $R$ jest środkiem odcinka $AT$, natomiast punkt $S$ leży na odcinku $BT$ i spełnia równość $BS = QT$. Dowieść, że prosta $PS$ jest równoległa do prostej $QR$.

## Zestaw C

**C1.** Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze $p$, dla których liczba $p+8$ jest podzielna przez $\lfloor\sqrt{p}\rfloor$ (symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od $x$).

**C2.** W zależności od $n \geqslant 2$ wyznaczyć największą możliwą liczbę szachowych wież, którą można w taki sposób ustawić na szachownicy o wymiarach $n \times n$, by spełniony był następujący warunek: jeśli jedna z wież jest szachowana przez dwie inne, to wszystkie trzy stoją na jednej lini.

**C3.** Dany jest trójkąt $ABC$. Okrąg o środku $D$ jest styczny do odcinka $BC$ oraz do prostych $AB$ i $AC$ w punktach leżących poza trójkątem $ABC$. Wykazać, że prosta $AD$ przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie $BCD$.

**C4.** Liczby rzeczywiste dodatnie $a, b, c$ spełniają następujące równości:

$$a + b + c = 17, \qquad a \cdot b \cdot c = 64.$$

Dowieść, że $\max\{a, b, c\} \geqslant 8$.

# Rozwiązania

**A1.** Udowodnimy przez indukcję zupełną względem $n$, że $a_n > a_{n-1}$. Zaczniemy od $a_2 > a_1$. Istotnie,

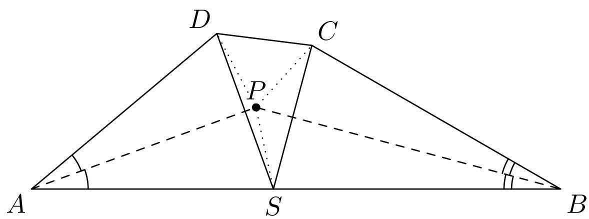
$$a_2 = 3a_1 - 1 \geqslant 3a_1 - a_1 = 2a_1 > a_1.$$

Ustalmy $n \geqslant 3$. Zakładamy, że $a_k > a_{k-1}$ dla wszystkich $k < n$. Udowodnimy, że wtedy także $a_n > a_{n-1}$. Dla liczb nieparzystych $n = 2t+1$ teza indukcyjna wynika bezpośrednio z treści zadania. Jeśli natomiast $n = 2t$, to

$$a_n = a_{2t} = 3a_t - 1 \geqslant 3(a_{t-1}+1) - 1 > 3a_{t-1} + 1 = a_{2t-1} = a_{n-1},$$

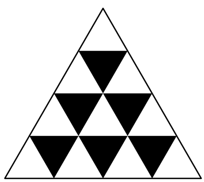
co kończy krok indukcyjny i dowodzi tezy.

**A2.** Wybierzmy na odcinku $AB$ punkt $S$, spełniający warunek $AS = AD$. Z treści zadania wynika, że zachodzi także równość $BS = BC$.




W tej sytuacji dwusieczne kątów $ABC$ i $DAB$ są jednocześnie symetralnymi odcinków $CS$ i $DS$. Wnioskujemy zatem, że punkt $P$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $CDS$, a więc $CP = DP$, co kończy dowód.

**A3.** Podzielmy dany trójkąt na $n^2$ trójkątów równobocznych o boku 1. Pokolorujmy je w sposób przedstawiony na rysunku poniżej (dla $n = 4$):



Każdy z otrzymanych w wyniku rozcięcia rombów jest złożony z jednego trójkąta białego i jednego czarnego, zatem $t$ jest równe co najmniej tyle, ile wynosi różnica między liczbą białych i czarnych trójkątów. Stąd

$$t \geqslant (1+2+\ldots+n) - (1+2+\ldots+(n-1)) = n,$$

co należało wykazać.

**A4.** Kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 3, więc albo wszystkie trzy liczby $a, b, c$ są podzielne przez 3, albo dokładnie jedna z liczb $a, b$ jest podzielna przez 3. Z tego wynika, że $d = c^2 + \frac{2}{3}ab$ jest liczbą całkowitą. Ponadto

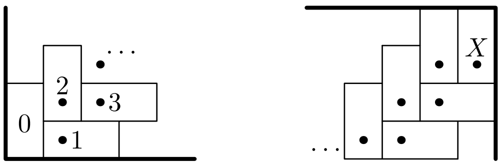
$$3d = 3c^2 + 2ab = 4c^2 - (a-b)^2 = (2c - a + b)(2c + a - b).$$

Aby dowieść złożoności liczby $d$ wystarczy jeszcze wykazać, że żadna z liczb $2c+a-b$, $2c - a + b$ nie jest równa 3. Jest tak, ponieważ $c > a, b$ oraz $a, b \geqslant 1$, więc

$$2c + a - b = (c - b) + c + a > 1 + 2 + 1 > 3.$$

Nierówności $2c - a + b > 3$ dowodzimy analogicznie, co kończy rozwiązanie zadania.

**B1.** Spróbujmy ułożyć kwadrat z kostek domina w taki sposób, by z żadnych dwóch nie był ułożony kwadrat o wymiarach $2 \times 2$. Kostka 0 (rysunek) przykrywa lewy dolny narożnik kwadratu i dalsze rozumowanie nie zależy od tego, czy jest ona ułożona pionowo, czy poziomo.




Położenie kolejno kostkek $1, 2, 3, \ldots$ jest określone jednoznacznie, gdyż muszą one przykrywać zaznaczone punkty, a przy tym być ułożone w sposób nie prowadzący do powstania niechcianego kwadratu. Problem pojawia się, gdy docieramy do prawego górnego narożnika. Nie można przykryć punktu oznaczonego $X$ bez układania kwadratu $2 \times 2$.

**B2.** Ze względnej pierwszości $m$ i $n$ wynika, że istnieją liczby całkowite dodatnie spełniające równość $pn+1 = qm$. Niech $d$ będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Przyjmijmy

$$a = b = 2^p d^m \quad \text{oraz} \quad c = 2^q d^n.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= (2^p d^m)^n + (2^p d^m)^n = 2 \cdot 2^{pn} d^{mn} \\ &= 2^{pn+1} d^{mn} = 2^{qm} d^{mn} = (2^q d^n)^m = c^m, \end{aligned}$$

Znaleźliśmy rozwiązania postaci $(2^p d^m, 2^p d^m, 2^q d^n)$ dla dowolnego $d$ całkowitego dodatniego oraz dobranych wcześniej $p$ i $q$. Jest ich oczywiście nieskończenie wiele.

**B3.** Udowodnimy najpierw przez indukcję, że

$$P_n(x) = (x+2)^{2^n} - 2.$$

Dla $n=1$ mamy $P_1(x) = T(x) = (x+2)^{2^1} - 2$, więc teza zachodzi. Krok indukcyjny przebiega następująco (zakładamy prawdziwość tezy dla $n$):

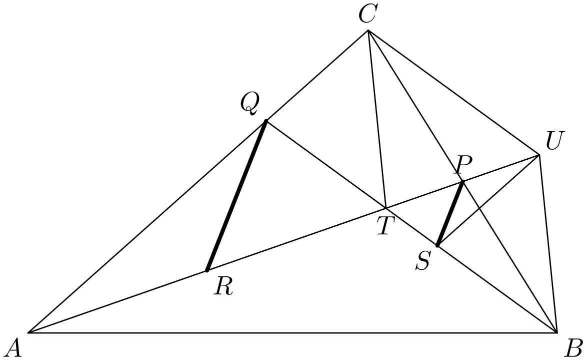
$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= T(P_n(x)) = (P_n(x)+2)^2 - 2 = ((x+2)^{2^n} - 2 + 2)^2 - 2 \\ &= (x+2)^{2^n \cdot 2} - 2 = (x+2)^{2^{n+1}} - 2, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny. Równanie z zadania przyjmuje więc postać

$$(x+2)^{2^n} = 2,$$

zatem $x+2 = \pm \sqrt[2^n]{2}$. Otrzymujemy stąd dwa rozwiązania: $\sqrt[2^n]{2} - 2$ oraz $-\sqrt[2^n]{2} - 2$.

**B4.** Oznaczmy przez $U$ punkt symetryczny do $T$ względem punktu $P$.




Czworokąt $BTCU$ jest równoległobokiem, gdyż jego przekątne dzielą się na połowy. W takim razie $CU \parallel TQ$ oraz $CU = BT = QS$. Wnioskujemy stąd, że czworokąt $CQSU$ także jest równoległobokiem, więc $CQ \parallel SU$. W takim razie trójkąty $AQT$ i $UST$ są jednokładne względem punktu $T$. Ponieważ punkty $P$ i $R$ są środkami odcinków odpowiednio $TU$ i $AT$, trójkąty $QRT$ i $PST$ są także jednokładne względem punktu $T$. A stąd już wynika teza.

**C1.** Załóżmy na razie, że $p > 16$. Przyjmijmy, że $n = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$. Wtedy $n \geqslant 4$ oraz

$$p = n^2 + kn - 8,$$

dla pewnego $k$ całkowitego dodatniego. Zauważmy, że $k$ musi być liczbą parzystą, gdyż dla $k$ nieparzystych liczba $n^2 + kn - 8$ jest parzysta i większa od 2, a więc złożona. Ponadto $k \neq 2$, ponieważ

$$n^2 + 2n - 8 = (n-2)(n+4)$$

nie jest liczbą pierwszą. Zatem $k \geqslant 4$. Jednak z nierówności

$$n^2 + kn - 8 = p < n^2 + 2n$$

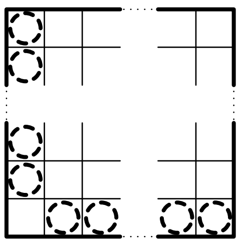
wynika, że

$$n < \frac{8}{k-2} \leqslant \frac{8}{4-2} = 4,$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $n \geqslant 4$. W tej sytuacji $p < 16$. Bezpośrednio sprawdzamy, że warunki zadania spełniają liczby $2, 3$ i $13$.

**C2.** Niech $k$ będzie liczbą wież, które są jedyne w swojej kolumnie, natomiast $w$ – analogicznie z wierszem. Każda z wież należy do przynajmniej jednego z tych typów, w przeciwnym razie nie będzie ona spełniać warunków zadania. Liczba wież nie przekracza więc $k + w$.

Jeśli $k = n$ lub $w = n$, to mamy łącznie $n$ wież na szachownicy. Jeżeli zaś $k, w < n$, to liczba wież nie przekracza $2n - 2$. Jest to liczba nie mniejsza od $n$ dla $n \geqslant 2$. Rysunek poniżej przedstawia ustawienie $2n - 2$ wież zgodnie z regułami zadania.

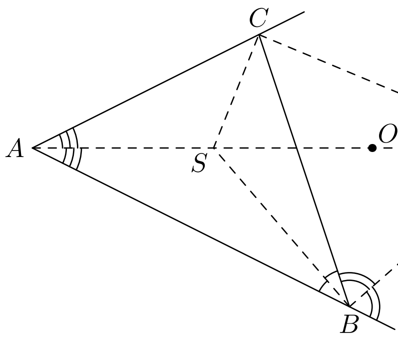


Wieże zapełniają cały lewy wiersz i dolną kolumnę, za wyjątkiem lewego dolnego pola szachownicy. Jasne jest, że przy takim ustawieniu żądane warunki są spełnione, wobec czego największą możliwą liczbą wież jest $2n - 2$.

**C3.** Niech $S$ będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$. Punkt $S$ leży na prostej $AD$, która jest dwusieczną kąta $BAC$. Ponadto prosta $BS$ jest dwusieczną kąta $ABC$, a prosta $BD$ jest dwusieczną kąta przyległego do kąta $ABC$. Stąd

$$\sphericalangle DBS = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC + \frac{1}{2}\sphericalangle CBD = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

.




Trójkąt $BDS$ jest prostokątny, więc środek okręgu opisanego na nim leży na środku przeciwprostokątnej $DS$. Oznaczmy go przez $O$. Analogicznie dowodzimy, że punkt $O$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $CDS$, stąd jest także środkiem okręgu opisanego na trójkącie $BCD$. Punkt $O$ oczywiście leży na prostej $AD$, co kończy dowód.

**C4.** Załóżmy nie wprost, że $a, b, c < 8$. Wtedy $c = 17 - a - b > 1$. Zachodzi także nierówność

$$\begin{aligned} 0 &< c(8-a)(8-b) = 64c - 8c(a+b)c + abc \\ &= 64c - 8c(17-c) + 64 = 8(c-1)(c-8) < 0, \end{aligned}$$

gdyż $1 < c < 8$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że przynajmniej jedna z liczb $a, b, c$ jest większa lub równa 8, co jest równoważne tezie.