ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

X Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2019 r.

Organizacja konkursu

Dziesiąta edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2018/2019. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Organizację Ligi wspiera Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zainteresowanymi. W szkołach wywieszone zostały plakaty informujące o konkursie. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlm.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLM na Facebooku. W konkursie wzięło udział 10 uczniów.

Uczestnicy rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia, zestaw B do końca lutego, zestaw C do końca marca. Każdy z zestawów liczył po 5 zadań z różnych działów matematyki. Rozwiązania oceniane były przez Komisję WLM. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie X WLM odbyło się 21 maja 2019 r. na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Uczestnicy, którzy wypadli najlepiej, otrzymali nagrody książkowe. Uroczystość uświetnił wykład popularnonaukowy prof. Krzysztofa Pawałowskiego.

Komisja WLM

- Przewodniczący: dr Bartłomiej Bzdęga.
- Zespół oceniający prace uczestników:
  dr Bartłomiej Bzdęga, dr hab. Małgorzata Bednarska-Bzdęga,
  mgr Jędrzej Garnek, mgr Łukasz Nizio, mgr Piotr Mizerka, Sylwester Swat.
- Zespół przygotowujący zestawy zadań:
  Kacper Bem, dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Jędrzej Garnek,
  Mieczysław Krawiarz, Patryk Matusiak, Wojciech Wawrów.
- Autorzy zadań:
  dr Bartłomiej Bzdęga (A2, A3, A4, A5, B1, B2, B3, B4, B5, C1, C3, C5),
  Patryk Matusiak (A1), Mieczysław Krawiarz (C2), Wojciech Wawrów (C4).

Wyniki konkursu

Nagroda I stopnia

Cezary Botta (140)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody II stopnia

Kosma Kasprzak (133)
Uczeń 3 klasy oddziałów gimnazjalnych XXXVIII Liceum w Poznaniu.

Oliwier Urbański (133)
Uczeń 3 klasy oddziałów gimnazjalnych 28 SP w Poznaniu.

Natalia Adamska (132)
Uczennica 2 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Szamotułach.

Nagrody III stopnia

Antoni Solarski (102)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Klaudia Tarabasz (90)
Uczennica 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Patryk Zubilewicz (83)
Uczeń 2 klasy Liceum Ogólnokształcącego Towarzystwa Salezjańskiego w Pile.

Szkice rozwiązań zadań

A1. Znaleźć wszyskie liczby naturalne n, dla których $4^n + 2^n + 17$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie. Dla każdego naturalnego $n \geqslant 5$ mamy

$$(2^n)^2 = 4^n < 4^n + 2^n + 17 < 4^n + 2 \cdot 2^n + 1 = (2^n + 1)^2,$$

więc dla takich n liczba $4^n + 2^n + 17$ nie jest kwadratem liczby naturalnej. Wystarczy zatem sprawdzić liczby naturalne $n \leqslant 4$, z których postawiony w zadaniu warunek spełnia tylko $n = 4$ – wówczas $4^n + 2^n + 17 = 17^2$.

A2. Dla liczb rzeczywistych $x \neq 0$ i $y \notin \{-1, 0, 1\}$ definiujemy zbiory

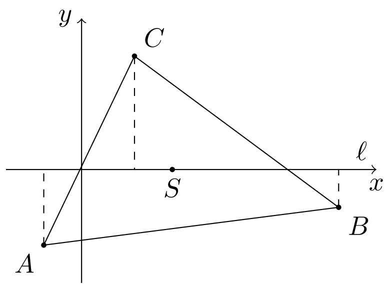
$$A = \{x, 2x, 3x, 4x, \ldots\} \qquad \text{i} \qquad B = \{y, y^2, y^3, y^4, \ldots\}.$$

Udowodnić, że dla każdego całkowitego nieujemnego n można tak dobrać liczby x i y, by zbiory A i B miały dokładnie n elementów wspólnych.

Rozwiązanie. Niech $x = \frac{1}{2^n}$ i $y = \frac{1}{2}$. Wtedy wspólny element zbiorów A i B to taki, którego można zapisać jednocześnie w postaci $\frac{a}{2^n}$ i $\frac{1}{2^b}$ dla pewnych całkowitych dodatnich a i b. Równość $\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^b}$ jest równoważna równości $a = 2^{n-b}$, którą spełnia dokładnie n par liczb całkowitych dodatnich (a, b). Podany przykład dowodzi, że liczby x i y można tak dobrać, by spełnione były postawione w zadaniu warunki.

A3. Prosta ℓ przechodzi przez środek ciężkości trójkąta ABC oraz przecina odcinki AC i BC. Wykazać, że odległość punktu C od prostej ℓ jest równa sumie odległości punktów A i B od prostej ℓ.

Rozwiązanie. Wprowadźmy układ współrzędnych, w którym oś OX pokrywa się z prostą ℓ, punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ leżą pod osią OX, a punkt $C = (x_C, y_C)$ – nad. Środkiem ciężkości trójkąta ABC jest punkt

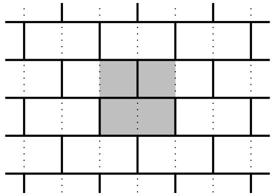


$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right).$$

Wówczas y_C jest odległością punktu C od prostej ℓ, a $-y_A$ i $-y_B$ – odległościami punktów odpowiednio A i B od tej prostej. Punkt S leży na prostej ℓ, więc $y_A + y_B + y_C = 0$, czyli $y_C = -y_A - y_B$, co kończy dowód.

A4. Na nieskończonej szachownicy gracze stawiają na zmianę kółko (gracz I) i krzyżyk (gracz II). Gra się kończy, gdy gracz I zapełni kółkami pewien kwadrat 2×2. Rozstrzygnąć, czy gracz I posiada strategię, która pozwoli mu zakończyć grę, niezależnie od tego, co zrobi przeciwnik.

Rozwiązanie. Udowodnimy, że gracz I nie ma takiej strategii. Podzielmy szachownicę na *cegiełki* w sposób przedstawiony na rysunku obok. Jeśli gracz I postawi kółko w którejś z cegiełek, to gracz II odpowieda krzyżykiem w tej samej cegiełce. To uniemożliwia zapełnienia kółkami kwadratu 2×2, gdyż każdy taki kwadrat zawiera jedną cegiełkę w całości.



A5. Liczby naturalne $m \geqslant n \geqslant 2$ oraz $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m < 2^n$ spełniają warunek $\mathtt{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 1$. Dowieść, że istnieją parami różne liczby $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, m\}$, dla których $\mathtt{NWD}\,(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}) = 1$.

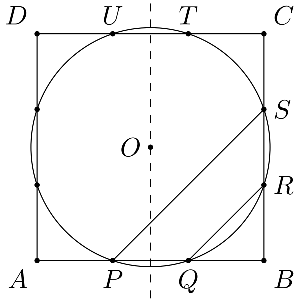
Rozwiązanie. Niech $\mathtt{NWD}(X)$ oznacza największy wspólny dzielnik elementów zbioru X. Spośród wszystkich niepustych podzbiorów X zbioru $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, dla których $\mathtt{NWD}(X) = 1$, wybieramy taki, który ma najmniej elementów. Bez utraty ogólności niech będzie to $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Wystarczy wykazać, że $k \leqslant n$, bo wówczas $\mathtt{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$.
Z minimalności zbioru B wynika, że dla $i = 1, 2, \ldots, k$ mamy $\mathtt{NWD}(B \setminus \{a_i\}) > 1$, więc istnieje taka liczba pierwsza p_i, że $p_i \nmid a_i$ oraz $p_i \mid a_j$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. Liczby $p_1, p_2, \ldots, p_k$ są parami różne, więc $p_1 p_2 \ldots p_{k-1} \mid a_k$, co daje

$$2^n > a_k \geqslant p_1 p_2 \ldots p_{k-1} \geqslant 2^{k-1}.$$

Z powyższej nierówności wynika, że $k \leqslant n$, co kończy dowód.

B1. Pewien okrąg dzieli każdy z boków czworokąta wypukłego $ABCD$ na trzy równe części. Wykazać, że ten czworokąt jest kwadratem.

Rozwiązanie. Przyjmijmy takie oznaczenia, jak na rysunku obok. Punkty Q i R są odpowiednio środkami odcinków PB i SB, więc $QR \parallel PS$. Wobec tego czworokąt $PQRS$ jest trapezem wpisanym w okrąg, więc $|PQ| = |RS|$ i w konsekwencji $|AB| = |BC|$. Analogicznie dowodzimy, że $|BC| = |CD| = |DA|$. Czworokąt $ABCD$ jest zatem rombem.
Środek O okręgu leży na symetralnych cięciw PQ i TU. Te symetralne są jednocześnie symetralnyni odcinków AB i CD. Ponieważ są to odcinki równoległe, ich symetralne też są równoległe, więc muszą się pokrywać, gdyż mają wspólny punkt O. Z tego wynika, że romb $ABCD$ ma oś symetrii przechodzącą przez środki jego przeciwległych boków, czyli jest kwadratem.



B2. Rozwiązać równanie

$$a^{|b|+|c|} + b^{|c|+|a|} + c^{|a|+|b|} = -1$$

w liczbach całkowitych a, b, c, niebędących jednocześnie zerami.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że równanie to jest symetryczne ze względu na jego niewiadome a, b, c.

Jeżeli $b = c = 0$, to otrzymujemy równanie sprzeczne $a^0 = -1$; analogicznie gdy którekolwiek dwie z niewiadomych są zerami. Wobec tego co najwyżej jedna z liczb a, b, c jest równa 0, więc wykładniki z lewej strony równości są dodatnie. Z tego wynika, że liczba $a + b + c$ jest tej samej parzystości co -1, czyli wśród liczb a, b, c są trzy lub jedna liczba nieparzysta. Nie mogą być trzy nieparzyste, bo wówczas lewa strona równości byłaby nieujemna jako suma trzech potęg o wykładnikach parzystych. A zatem dwie z niewiadomych są parzyste – bez straty ogólności niech będą to a i b – a trzecia jest nieparzysta.

Liczba $c^{|a|+|b|}$ daje resztę 1 z dzielenia przez 4 jako potęga liczby nieparzystej o wykładniku parzystym. Z tego wynika, że $4 \nmid a^{|b|+|c|} + b^{|c|+|a|}$, więc $|b| + |c| = 1$ lub $|c| + |a| = 1$. W pierwszym przypadku (drugi jest analogiczny) mamy $b = 0$ i $c = \pm 1$, więc $c^{|a|+|b|} = 1$. Prowadzi to do równości $a = -2$.

Po uwzględnieniu wszystkich analogicznych przypadków, łącznie otrzymujemy 12 rozwiązań: trójka $(a, b, c) = (-2, 0, \pm 1)$ i wszystkie jej permutacje.

B3. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y nierówność

$$|f(x) - f(y)| \cdot |x - y| \leqslant 1.$$

Dowieść, że f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że f nie jest funkcją stałą. Wtedy $r = |f(x) - f(y)| \neq 0$ dla pewnych liczb rzeczywistych x i y. Wybierzmy tak dużą liczbę M, aby zachodziły nierówności $|x - M| > \frac{2}{r}$ i $|M - y| > \frac{2}{r}$. Wtedy jednak otrzymujemy sprzeczność

$$r = |f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| \leqslant \frac{1}{|x - M|} + \frac{1}{|M - y|} < r,$$

która dowodzi, że funkcja f jest stała.

B4. Na obóz wyjechało $n \geqslant 3$ uczniów, niektórzy z nich znali się jeszcze przed wyjazdem. Podczas obozu codziennie odbywał się wieczorek integracyjny, na którym zaznajamiała się każda para uczestników, która posiadała wspólnego znajomego, poznanego najpóźniej w dniu poprzednim. Obóz zakończono z chwilą, w której każdy już poznał każdego. W zależności od n wyznaczyć największą możliwą, skończoną liczbę dni, które mógł trwać obóz.

Rozwiązanie. Nazwijmy *dystansem* pomiędzy dwoma obozowiczami X i Y najmniejszą liczbę $d = d(X, Y)$, dla której na początku obozu można wskazać taki ciąg uczniów $(A_0, A_1, \ldots, A_d)$, że każde dwa jego sąsiednie wyrazy są znajomymi oraz $A_0 = X$ i $A_d = Y$. Jeśli taki ciąg nie istnieje, to wówczas stosujemy konwencję $d(X, Y) = \infty$.

Zwróćmy uwagę, że dystans spełnia nierówność trójkąta:

$$d(X, Y) + d(Y, Z) \geqslant d(X, Z).$$

Jest tak dlatego, że scalając ciąg łączący X z Y i ciąg łączący Y z Z, otrzymamy ciąg łączący X z Z, który niekoniecznie jest najkrótszy.

Udowodnimy indukcyjnie, że po k dniach uczestnicy X i Y znają się wtedy i tylko wtedy, gdy $d(X, Y) \leqslant 2^k$. Dla $k = 0$ (początek obozu) wynika to wprost z definicji dystansu. Jest to baza indukcji.

Przypuśćmy, że teza zachodzi dla pewnego ustalonego $k \geqslant 0$. Jeśli X i Y są znajomymi po $k + 1$ dniach, to albo znali się już po k dniach (wtedy z założenia indukcyjnego $d(X, Y) \leqslant 2^k \leqslant 2^{k+1}$), albo poznali się w dniu $k + 1$ – w tym wypadku po k-tym wieczorku mieli wspólnego znajomego Z, dzięki któremu się poznali. Wówczas

$$d(X, Y) \leqslant d(X, Z) + d(Z, Y) \leqslant 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

W drugą stronę, jeżeli $d(X, Y) > 2^{k+1}$, to na mocy założenia indukcyjnego X i Y nie znają się po k-tym wieczorku. Dla każdego uczestnika U zachodzą nierówności

$$d(X, U) + d(U, Y) \geqslant d(X, Y) > 2^{k+1},$$

więc $d(X, U) > 2^k$ lub $d(U, Y) > 2^k$, czyli U nie zna X lub nie zna Y. Z tego wynika, że X i Y nie zapoznają się na wieczorku $k + 1$, co kończy dowód indukcyjny.

Niech D oznacza największy dystans pomiędzy uczestnikami obozu. Jeśli $D = \infty$, to obóz nigdy się nie skończy. W przeciwnym razie obóz potrwa $\lceil \log_2 D \rceil$ dni.

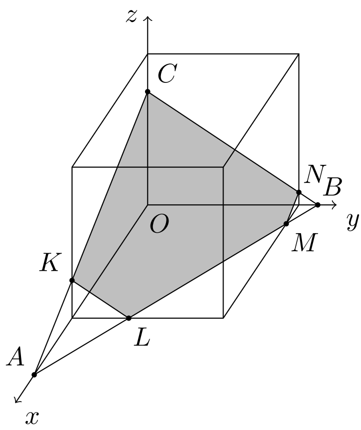
Największe możliwe skończone D jest równe $n - 1$ – gdy wszystkich uczestników obozu można ustawić w ciąg, w którym znają się jedynie uczestnicy sąsiadujący. Wtedy obóz potrwa $\lceil \log_2(n - 1) \rceil$ dni.

B5. Sześcian o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest pięciokątem o polu P. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości P.

Rozwiązanie. Umieśćmy sześcian i jego przekrój w układzie współrzędnych, tak jak na rysunku obok. Przyjmijmy, że

$$A=(a,0,0),\quad B=(0,b,0),\quad C=(0,0,c),$$

przy czym $a,b>1$ oraz $0<c\leqslant 1$.



Łatwo wykazać, że $P>\frac{1}{2}$ – wynika to z faktu, że P jest większe niż pole rzutu prostokątnego pięciokąta $CKLMN$ na płaszczyznę OXY, a ten rzut ma pole większe niż $\frac{1}{2}$, gdyż zawiera trójkąt prostokątny o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,1)$ i $(1,0)$. Ponadto w granicy $a,b\to 1$ i $c\to 0$ pole przekroju dąży do $\frac{1}{2}$.

Na płaszczyźnie OXY prosta AB ma równanie $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ i leży bliżej punktu $(0,0)$ niż punkt $(1,1)$, więc $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>1$, równoważnie $a+b>ab$. Podstawmy zatem

$$s=ab,\quad s+t=a+b\qquad \text{dla pewnych } s>1 \text{ i } t>0.$$

Odnotujmy, że $s^2+t^2>a^2+b^2$, gdyż po przekształceniach jest to równoważne nierówności $(a-1)(b-1)>0$.

Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Z twierdzenia de Gua otrzymujemy

$$\begin{aligned}[ABC]&=\sqrt{[OAB]^2+[OBC]^2+[OCA]^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\\&\leqslant\sqrt{a^2b^2+b^2+a^2}<\sqrt{2s^2+t^2}.\end{aligned}$$

Trójkąt ALK jest podobny do trójkąta ABC w skali $1-\frac{1}{a}$, więc zachodzi równość $[ALK]=\left(1-\frac{1}{a}\right)^2[ABC]$. Z tego oraz z analogicznego wyznaczenia $[BMN]$ wynika, że $P=[ABC]\cdot r$, przy czym

$$r=1-\left(1-\frac{1}{a}\right)^2-\left(1-\frac{1}{b}\right)^2=\frac{2ab-(a+b-ab)^2}{a^2b^2}=\frac{2s-t^2}{s^2}<\frac{\sqrt{2s-t^2}\sqrt{2s}}{s^2}.$$

Z nierówności $(2s^2+t^2)(2s-t^2)=4s^3-2(s-1)t^2-t^4<4s^3$ otrzymujemy wreszcie

$$P=[ABC]\cdot r<\frac{\sqrt{4s^3}\sqrt{2s}}{2s^2}=\sqrt{2}.$$

Wartość ta jest osiągana w granicy $a\to 1$, $b\to\infty$ przy $c=1$.

Ponieważ P jest funkcją ciągłą zmiennych a, b i c, zbiór wszystkich możliwych wartości P jest całym przedziałem $\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$.

C1. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} \;+\; \sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{d^2+a^2} \;\geqslant\; (a+c)(b+d).$$

Rozwiązanie. Nierówność, którą mamy udowodnić, jest sumą dwóch następujących nierówności:

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} \geqslant ad+bc, \qquad \sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{d^2+a^2} \geqslant ab+cd.$$

Każda z nich po obustronnym podniesieniu do kwadratu i uproszczeniu, jest równoważna prawdziwej nierówności $(ac-bd)^2 \geqslant 0$.

C2. Niech $d(n)$ oznacza liczbę dzielników n, a $k(n)$ – liczbę tych dzielników n, które są kwadratami liczb naturalnych. Wykazać, że dla każdego całkowitego $r \geqslant 1$ istnieje liczba naturalna n, spełniająca równość $d(n) = r\cdot k(n)$.

Rozwiązanie. Jeśli p jest liczbą pierwszą i $p\nmid n$, to dla naturalnego t zachodzą równości

$$d(np^t) = (t+1)d(n), \qquad k(np^t) = k(n)(\lfloor t/2\rfloor + 1).$$

Pierwsza z nich wynika z tego, że każdy dzielnik liczby np^t jest postaci ep^i, w której $e\mid n$ oraz $i\in\{0,1,\ldots,t\}$. Natomiast każdy kwadrat dzielący np^t jest postaci lp^{2i}, przy czym $l\mid n$ jest kwadratem, zaś $i\in\{0,1,\ldots,\lfloor t/2\rfloor\}$ – to dowodzi drugiej równości.

Niech $f(n) = d(n)/k(n)$. Dla liczby pierwszej $p\nmid n$, z powyższych wzorów otrzymujemy

$$f(np^t) = f(n)\cdot\begin{cases} 2, & \text{gdy } t = 2a-1,\\ \frac{2a-1}{a}, & \text{gdy } t = 2a\end{cases} \qquad \text{(liczba } a \text{ jest naturalna).}$$

Udowodnimy za pomocą silnej indukcji, że dla każdego r istnieje takie n, że $f(n) = r$.

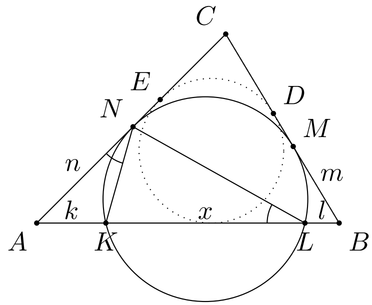
Jest jasne, że $f(1) = 1$. Ustalmy $r>1$ i załóżmy indukcyjnie, że istnieją takie liczby naturalne $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$, że $f(n_i) = i$ dla wszystkich $i<r$. Niech p będzie liczbą pierwszą, która nie dzieli żadnej z liczb $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$.

Jeżeli $2\mid r$, to $f(n_{r/2}p) = 2f(n_{r/2}) = r$. W przeciwnym razie zapiszmy $r = 2a-1$ dla pewnego naturalnego $a<r$. Mamy wówczas $f(n_ap^r) = \frac{r}{a}f(n_a) = r$, co kończy dowód indukcyjny.

C3. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg styczny do odcinków BC i AC przecina odcinek AB w punktach K i L. Wykazać, że

$$\Big||AK|-|BL|\Big| \leqslant \Big||AC|-|BC|\Big|.$$

Rozwiązanie. Przyjmijmy oznaczenia widoczne na rysunku obok. Z podobieństwa trójkątów AKN i ALN otrzymujemy $n^2=k(k+x)$, analogicznie $m^2=l(l+x)$. Okrąg z zadania jest jednokładny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC w stosunku większym niż 1, więc



$$n+m<|AE|+|BD|=|AB|.$$

Z tego wynika, że

$$\begin{aligned}|AB|\cdot\Big||AC|-|BC|\Big| &= |AB|\cdot|n-m| \geqslant (n+m)|n-m| = |n^2-m^2|\\ &= |k^2+kx-l^2-lx| = (k+l+x)|k-l| = |AB|\cdot|k-l|.\end{aligned}$$

Po obustronnym podzieleniu przez $|AB|$ otrzymujemy tezę.

C4. Dany jest wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych i pewien zbiór A liczb naturalnych większych od 1. Powiemy, że zbiór A *pokrywa* wielomian $P(x)$, jeżeli dla każdego całkowitego n liczba $P(n)$ jest wielokrotnością pewnego elementu zbioru A. Dowieść, że jeżeli dany wielomian można pokryć zbiorem skończonym, to można go pokryć zbiorem jednoelementowym.

Rozwiązanie. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że wielomian $P(x)$ można pokryć pewnym zbiorem skończonym A, natomiast nie można go pokryć żadnym zbiorem jednoelementowym. Niech $p_1,p_2,\ldots,p_k$ będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi elementów zbioru A. Zbiór jednoelementowy $\{p_i\}$ nie pokrywa wielomianu P, więc istnieje takie całkowite r_i, że $p_i\nmid P(r_i)$ dla $i=1,2,\ldots,k$. Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje liczba całkowita n, która spełnia wszystkie następujące kongruencje:

$$n\equiv r_1 \pmod{p_1},\quad n\equiv r_2 \pmod{p_2},\quad \ldots,\quad n\equiv r_k \pmod{p_k}.$$

Wobec tego dla $i=1,2,\ldots,k$ mamy

$$P(n)\equiv P(r_i)\not\equiv 0 \pmod{p_i},$$

czyli liczba $P(n)$ nie jest podzielna przez żadną z liczb $p_1,p_2,\ldots,p_k$. Jest to jednak sprzeczność – zbiór A nie pokrywa wielomianu $P(x)$, bo żaden element zbioru A nie dzieli liczby $P(n)$.

C5. Niech A będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n przez A_n oznaczmy zbiór tych liczb, które da się zapisać w postaci sumy $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, w której $a_1, \ldots, a_n \in A$ są niekoniecznie różne. Niech $r_n = |A_{n+1}| - |A_n|$. Dowieść, że ciąg (r) jest od pewnego miejsca stały.

Rozwiązanie. Dla $|A| = 1$ teza jest trywialna, niech więc $|A| > 1$. Jeżeli wszystkie elementy zbioru A powiększymy o pewną stałą lub pomnożymy przez pewną niezerową stałą, to liczby elementów zbiorów A_n nie zmienią się. Możemy zatem założyć, że $\min A = 0$ oraz $\texttt{NWD}(A) = 1$.

Wówczas zbiór liczb naturalnych, których nie da się zapisać za pomocą sumy pewnej liczby niekoniecznie różnych elementów zbioru A jest skończony. Oznaczmy ten zbiór przez X. Elementy zbioru A_{n+1} powstają z dodawania parami elementów zbiorów A_n i A, w szczególności $A_n \subseteq A_{n+1}$, gdyż $0 \in A$. Niech $m = \max A$ i $x = \max X$. Dla odpowiednio dużego n_0 mamy więc

$$\{0, 1, 2, \ldots, x\} \setminus X \subset A_{n_0} \quad \text{i} \quad x + 1, x + 2, \ldots, x + m \in A_{n_0}.$$

Indukcyjnie dowodzimy, że dla naturalnych t mamy

$$\{0, 1, 2, \ldots, x\} \setminus X \subset A_{n_0+t} \quad \text{i} \quad x + 1, x + 2, \ldots, x + (t + 1)m \in A_{n_0+t}.$$

Dla dostatecznie dużych $n = n_0 + t$ – powiedzmy dla $n > N$ – zachodzi nierówność

$$x + (t + 1)m > \frac{1}{2}(n_0 + t)m = \frac{1}{2} \max A_n.$$

Oznacza to, że dla $n > N$ jedynymi liczbami naturalnymi mniejszymi od $\frac{1}{2} \max A_n$ i nienależącymi do A_n są elementy zbioru X.

Rozważmy teraz zbiór $B = \{m - a : a \in A\}$ i utwórzmy ciąg zbiorów (B_n) analogiczny do ciągu (A_n), ale dla zbioru B. Jest jasne, że $0 \in B$ i $\texttt{NWD}(B) = 1$. Rozumując analogicznie jak dla zbioru A, dochodzimy do wniosku, że dla odpowiednio dużych n – powiedzmy $n > N'$ – jedynymi liczbami naturalnymi mniejszymi od $\frac{1}{2} \max B_n$ i nienależącymi do B_n są elementy zbioru Y, który definiujemy analogicznie do zbioru X.

Ponieważ $B_n = \{mn - \alpha : \alpha \in A_n\}$, wnioskujemy, że dla $n > \max\{N, N'\}$ do zbioru A_n należą liczby $0, 1, 2, \ldots, mn$ z nastęującymi wyjątkami: elementami zbioru X oraz liczbami postaci $mn - \gamma$ przy $\gamma \in Y$. W takim razie

$$|A_n| = mn - |X| - |Y| \quad \text{dla } n > \max\{N, N'\}.$$

To oznacza, że dla takich n zachodzi równość $r_n = m$, czyli ciąg (r) jest od pewnego miejsca stały.