ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

XI Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2020 r.

Organizacja konkursu

Jedenasta edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2019/2020. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Organizację Ligi wspiera Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zainteresowanymi. W szkołach wywieszone zostały plakaty informujące o konkursie. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlm.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLM na Facebooku. W konkursie wzięło udział 33 uczniów.

Uczestnicy rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia, zestaw B do końca lutego, zestaw C do końca marca. Każdy z zestawów liczył po 5 zadań z różnych działów matematyki. Rozwiązania oceniane były przez Komisję WLM. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Komisja WLM

- Przewodniczący: dr Bartłomiej Bzdęga.
- Zespół oceniający prace uczestników:
  dr hab. Małgorzata Bednarska-Bzdęga, mgr Jędrzej Garnek,
  mgr Łukasz Nizio, mgr Piotr Mizerka, mgr Sylwester Swat.
- Zespół przygotowujący zestawy zadań:
  Kacper Bem, dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Jędrzej Garnek,
  Mieczysław Krawiarz, Patryk Matusiak, Wojciech Wawrów.
- Autorzy zadań:
  dr Bartłomiej Bzdęga (A1, A2, A3, A4, A5, B2, B3, B4, B5, C1, C5),
  Kacper Bem (B1), Wojciech Wawrów (C2),
  dr hab. Małgorzata Bednarska-Bzdęga (C3), dr Stefan Barańczuk (C4).

Wyniki konkursu

Nagrody I stopnia

Oliwier Urbański (147)
Uczeń 1 klasy VII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Cezary Botta (143)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Natalia Adamska (140)
Uczennica 3 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Szamotułach.

Nagrody II stopnia

Michał Redmer (121)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Klaudia Tarabasz (115)
Uczennica 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Antoni Solarski (109)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Patryk Zubilewicz (108)
Uczeń 3 klasy Liceum Ogólnokształcącego Towarzystwa Salezjańskiego w Pile.

Nagrody III stopnia

Kosma Kasprzak (93)
Uczeń 1 klasy XXXVIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Paweł Felcyn (89)
Uczeń 2 klasy Liceum Ogólnokształcącego Towarzystwa Salezjańskiego w Pile.

Zofia Gołaska (85)
Uczenica 3 klasy Liceum Ogólnokształcącego św. Marii Magdaleny w Poznaniu.

Grzegorz Świąder (82)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Maksym Ratajczyk (79)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Stefan Zbąszyniak (71)
Uczeń 3 klasy III Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyróżnienie

Aleksandra Strzelecka (57)
Uczennica 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Szkice rozwiązań zadań

A1. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, dla których abc, bcd, cda, dab są kwadratami liczb naturalnych. Udowodnić, że liczby a, b, c, d również są kwadratami liczb naturalnych.

Rozwiązanie. Liczba $d = \frac{bcd \cdot cda \cdot dab}{(abcd)^2}$ jest kwadratem liczby wymiernej i jest naturalna, więc jest kwadratem liczby naturalnej. Analogicznie dowodzimy, że a, b i c również są kwadratami liczb naturalnych.

A2. Liczby rzeczywiste $x, y, z \neq 0$ spełniają równości

$$\frac{x^2+y^2}{z} = \frac{y^2+z^2}{x} = \frac{z^2+x^2}{y}.$$

Wykazać, że $x = y = z$.

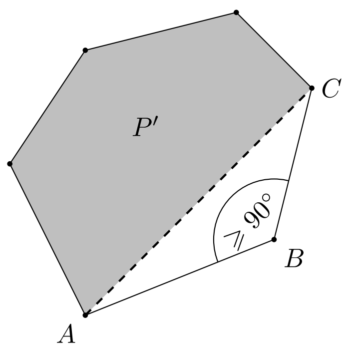
Rozwiązanie. Przekształćmy równoważnościowo pierwszą równość:

$$(x^2+y^2)x = (y^2+z^2)z \iff x^3-z^3+xy^2-zy^2 = 0 \iff (x-z)(x^2+xz+z^2+y^2) = 0.$$

Liczby $x, y, z \neq 0$ są tego samego znaku, więc $x^2 + xz + z^2 + y^2 > 0$. Wobec tego $x = z$; pozostałych równości dowodzimy analogicznie.

A3. Niech $S(W)$ oznacza sumę kwadratów długości boków wielokąta W. Udowodnić, że dla każdego wielokąta wypukłego W można wskazać trzy jego wierzchołki, które tworzą trójkąt T spełniający nierówność $S(T) \geqslant S(W)$.

Rozwiązanie. Niech P będzie dowolnym n-kątem wypukłym, przy czym $n \geqslant 4$. Taki wielokąt ma kąt o mierze większej lub równej $90°$ – wynika to z obserwacji, że średnia miara jego kąta wynosi $\frac{n-2}{n} \cdot 180° \geqslant 90°$ dla $n \geqslant 4$. Oznaczmy przez A, B, C pewne trzy kolejne wierzchołki wielokąta P, dla których $|\sphericalangle ABC| \geqslant 90°$. Wtedy na mocy twierdzenia cosinusów



$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||AC| \cos |\sphericalangle ABC| \\ &> |AB|^2 + |BC|^2. \end{aligned}$$

Jeśli zatem usuniemy trójkąt ABC, to otrzymamy wielokąt P', dla którego zachodzi nierówność $S(P') \geqslant S(P)$. Ponadto wielokąt P' również jest wypukły i ma $n-1$ boków. Tę operację można zastosować do danego wielokąta W tyle razy, ile potrzeba do otrzymania trójkąta T. Ten trójkąt spełnia warunek $S(T) \geqslant S(W)$.

A4. Niech $k \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że jeśli iloczyn pewnych k kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez 4^k, to dokładnie jeden z czynników dzieli się przez 2^{k+1}.

Rozwiązanie. Niech L_i oznacza liczbę wielokrotności liczby 2^i wśród pewnych k kolejnych liczb, dla $i = 1, 2, \ldots$. Wtedy dokładnie $L_{i+1} - L_i$ z nich dzieli się przez 2^i, ale nie przez 2^{i+1}. Z tego wynika, że największy wykładnik potęgi dwójki dzielącej ich iloczyn jest równy

$$w = (L_1 - L_2) + 2(L_2 - L_3) + 3(L_3 - L_4) + \ldots = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots.$$

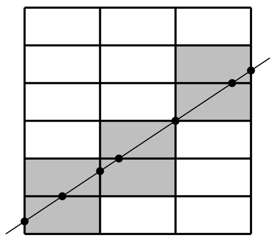
Jest jasne, że $L_i < \frac{k}{2^i} + 1$. Przypuśćmy, że żadna z rozważanych k kolejnych liczb naturalnych nie jest podzielna przez 2^{k+1}. Mamy wtedy $L_i = 0$ dla $i > k$, więc

$$w < \frac{k}{2} + 1 + \frac{k}{4} + 1 + \frac{k}{8} + 1 + \ldots + \frac{k}{2^k} + 1 = k\left(2 - \frac{1}{2^k}\right) < 2k.$$

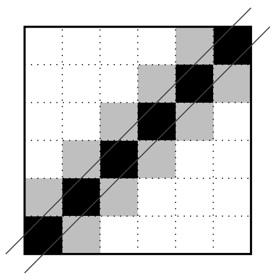
To oznacza, że iloczyn tych k kolejnych liczb nie jest podzielny przez $2^{2k} = 4^k$.

Udowodniliśmy, że wśród danych liczb jest co najmniej jedna podzielna przez 2^{k+1}. Na koniec zauważmy, że wśród k kolejnych liczb naturalnych jest co najwyżej jedna podzielna przez 2^{k+1}, ponieważ $2^{k+1} > k$. To kończy dowód.

A5. W zależności od liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć największą liczbę k o następującej własności: dla każdego podziału kwadratu o boku $2n$ na prostokąty o wymiarach 2×1 istnieje prosta, która przecina co najmniej k prostokątów.

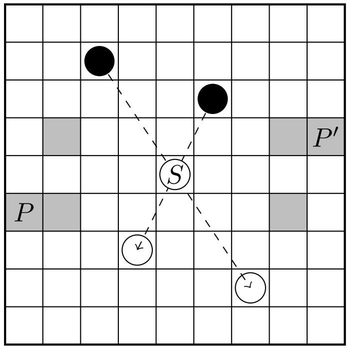


Rozwiązanie. Rozważmy najpierw podział, w którym wszystkie prostokąty 2×1 zorientowane są poziomo. Wówczas kwadrat jest podzielony za pomocą $n-1$ pionowych linii i $2n-1$ poziomych. Liczba prostokątów przeciętych pewną prostą jest równa pomniejszonej o 1 liczbie punktów przecięcia nią linii pionowych, poziomych i brzegu kwadratu (zaznaczone na pierwszym rysunku). Wobec tego $k \leqslant (n-1) + (2n-1) + 2 - 1 = 3n - 1$.



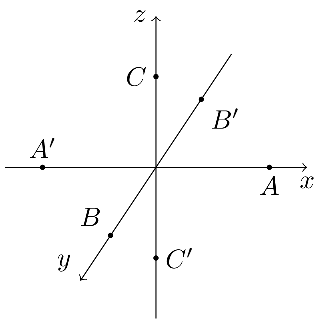
Rozważmy teraz dowolny podział kwadratu na prostokąty. Podzielmy kwadrat na pola (kwadraty jednostkowe) i pokolorujmy na czarno te, które leżą na jednej z przekątnych kwadratu, a na szaro te, które sąsiadują z czarnymi (drugi rysunek). Prostokąty przykrywające jedno czarne i jedno szare pole nazwijmy prostokątami typu I, a przykrywające jedno szare i jedno niepokolorowane – typu II. Jest dokładnie $2n$ prostokątów typu I i $2n-2$ prostokątów typu II. Jedna z prostych zaznaczonych na drugim rysunku przecina wszystkie prostokąty typu I oraz co najmniej połowę prostokątów typu II, co łącznie daje co najmniej $3n-1$ prostokątów. Udowodniliśmy zatem, że $k \geqslant 3n-1$. Uwzględniając wcześniej wykazaną nierówność, otrzymamy $k = 3n+1$.

B1. Dwaj gracze stawiają na zmianę hetmany na szachownicy o wymiarach 9×9, przy czym hetmana można postawić wyłącznie na wolnym polu, którego nie atakuje żaden z hetmanów ustawionych wcześniej. Przegrywa gracz, który jako pierwszy nie może wykonać ruchu. Który z graczy – rozpoczynający grę, czy jego przeciwnik – ma strategię gwarantującą zwycięstwo?



Rozwiązanie. Gracz pierwszy (biały) stawia pierwszego hetmana na środku szachownicy. Następnie na każdy kolejny ruch drugiego gracza (czarnego) odpowiada środkowosymetrycznie względem środka S szachownicy. Indukcyjnie dowodzimy, że po każdym jego ruchu zbiór dostępnych pól (na rysunku zacienione) jest środkowosymetryczny względem punktu S. Jeśli pola P i P' są dostępnymi polami symetrycznymi względem S, to hetman ustawiony na polu P nie atakuje pola P' – w przeciwnym razie musiałby atakować hetmana ustawionego na środku szachownicy. W takim razie gdy gracz drugi ustawi hetmana na polu P, wtedy gracz pierwszy będzie mógł odpowiedzieć, ustawiając kolejnego na polu P'. Gracz pierwszy ma zatem odpowiedź na każdy ruch gracza drugiego, więc nie przegra. Gra kiedyś musi się skończyć – szachownica pomieści co najwyżej 9 hetmanów – więc gracz pierwszy wygra.

B2. Rozstrzygnąć, czy można tak umieścić 6 punktów w przestrzeni, aby spełniony był następujący warunek: każde trzy z tych sześciu punktów wyznaczają płaszczyznę, która jest prostopadła lub równoległa do płaszczyzny wyznaczonej przez trzy pozostałe punkty i różna od niej.



Rozwiązanie. Na osi OX trójwymiarowego układu współrzędnych umieśćmy takie punkty A i A', żeby punkt O był środkiem odcinka AA'. Analogicznie umieszczamy B i B' na osi OY oraz C i C' na osi OZ. Wykażemy, że te 6 punktów spełnia żądany warunek.

Rozważmy najpierw płaszczyznę wyznaczoną przez takie trzy z tych sześciu punktów, że każdy z nich leży na innej osi układu współrzędnych. Bez utraty ogólności niech będą to A, B i C. Wówczas płaszczyzny ABC i $A'B'C'$ są równoległe, gdyż są środkowosymetryczne względem punktu O. W każdym innym przypadku możemy bez utraty ogólności założyć, że jedna z wybranych płaszczyzn przechodzi przez punkty C i C' oraz jeden z czterech pozostałych punktów. Jest to zatem płaszczyzna OXY lub OXZ, a trzy pozostałe punkty leżą na płaszczyźnie OYZ, która jest do nich prostopadła.

B3. Podać przykład (z uzasadnieniem) funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o następującej własności: Dla każdego niepustego przedziału (a, b) istnieje takie $c \in (a, b)$, że $f(c) > f(a)$ i $f(c) > f(b)$.

Rozwiązanie. Przykładem funkcji spełniającej ten warunek jest

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych,} \\ m & \text{dla wymiernych } x \text{ w postaci nieskracalnej } \frac{n}{m} \text{ przy } m > 0. \end{cases}$$

Dla uzasadnienia rozważymy dowolny niepusty przedział otwarty (a, b). Wybierzmy liczbę pierwszą p, spełniającą nierówności:

$$\frac{1}{p} < \frac{b-a}{2}, \qquad p > f(a), \qquad p > f(b).$$

Pierwszy warunek gwarantuje, że $\frac{n}{p} \in (a, b)$ oraz $\frac{n+1}{p} \in (a, b)$ dla pewnego całkowitego n. Co najmniej jeden z tych ułamków jest nieskracalny, niech będzie on równy x. Wobec tego $x \in (a, b)$ i $f(x) = p$, przy czym $p > f(a)$ i $p > f(b)$, co kończy uzasadnienie.

B4. Ustalmy liczbę pierwszą p oraz liczby całkowite dodatnie $a, n < p$. Niech A będzie zbiorem reszt z dzielenia przez p liczb $a, 2a, 3a, \ldots, na$. Dowieść, że ze zbioru A można wybrać $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ elementów, które uporządkowane rosnąco są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że reszty z dzielenia przez p liczb $a, 2a, \ldots, na$ są różne – jeśli ka i la dają taką samą, to $p \mid (k-l)a$, co ma miejsce tylko dla $k = l$, bo $1 \leqslant a < p$ i $|k - l| < n < p$.

Rozważmy zbiór reszt z dzielenia przez p liczb $0, a, 2a, \ldots, \lfloor\sqrt{n}\rfloor a$. Jest to $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$ różnych liczb należących do zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, więc pewne dwie z nich różnią się o mniej niż $p/\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Niech będą to reszty z dzielenia przez p liczb $k_1 a$ i $k_2 a$, a różnicę między tymi resztami oznaczmy przez r. Ponadto niech $d = |k_1 - k_2|$.

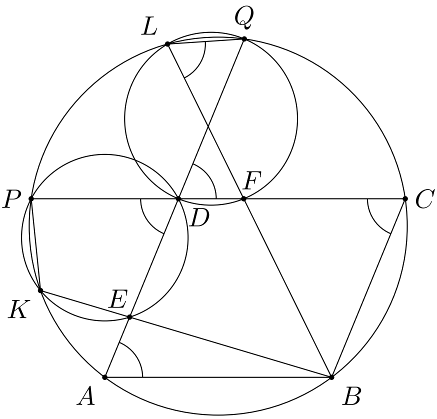
Z powyższego wynika, że dla pewnego $d \in \{1, 2, \ldots, \lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$ liczba da daje resztę r lub $p - r$ z dzielenia przez p, przy czym $r < p/\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Niech D będzie zbiorem reszt z dzielenia przez p liczb

$$da,\ (2d)a,\ (3d)a,\ \ldots,\ (\lfloor\sqrt{n}\rfloor d)a.$$

Wykażemy, że uporządkowane rosnąco elementy zbioru D tworzą poszukiwany ciąg arytmetyczny. W tym celu najpierw zauważmy, że $\lfloor\sqrt{n}\rfloor d \leqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor^2 \leqslant n$, więc $D \subseteq A$.

Jeśli liczba da daje resztę r z dzielenia przez p, to $D = \{r, 2r, \ldots, \lfloor\sqrt{n}\rfloor r\}$, gdyż $\lfloor\sqrt{n}\rfloor r < p$. Jeżeli natomiast liczba da daje z dzielenia przez p resztę $p - r$, to $D = \{p - r, p - 2r, \ldots, p - \lfloor\sqrt{n}\rfloor r\}$, z tego samego powodu.

B5. Dany jest równoległobok $ABCD$ o kącie ostrym przy wierzchołku A. Na trójkącie ABC opisano okrąg ω. Punkty E i F leżą odpowiednio na odcinkach AD i CD. Proste BE i BF przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach K i L, różnych od B. Okrąg opisany na trójkącie DEK przecina okrąg ω w punktach K i P, a okrąg opisany na trójkącie DFL przecina okrąg ω w punktach L i Q. Dowieść, że punkt B leży na symetralnej odcinka PQ.



Rozwiązanie. Zachodzą równości kątów $|\sphericalangle EDP| = 180^\circ - |\sphericalangle EKP| = |\sphericalangle BCP|$, ponieważ czworokąty $BCPK$ i $EDPK$ są wpisane w okręgi. Ta równość w połączeniu z równoległością prostych BC i AD daje współliniowość punktów C, D i P. Może też być tak, że odcinki DP i EK przecinają się – wtedy postępujemy analogicznie jak w przypadku odcinków DQ i FL, który teraz rozważymy.

Zachodzą równości kątów wpisanych: $|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle BLQ| = |\sphericalangle FLQ| = |\sphericalangle FDQ|$. To w połączeniu z równoległością prostych AB i CD daje współliniowość punktów A, D i Q. Możliwe jest również, by $FDQL$ był czworokątem wypukłym – wtedy postępujemy analogicznie jak w przypadku czworokąta $EDPK$, który rozważyliśmy poprzednio.

Wobec powyższych współliniowości, czworokąty $ABCP$ i $ABCQ$ są trapezami wpisanymi w okrąg, więc zachodzą równości $|AP| = |BC|$ i $|AB| = |CQ|$. Trójkąty PAB i BCQ są więc przystające (bkb), zatem $|BP| = |BQ|$, czyli punkt P leży na symetralnej odcinka PQ.

C1. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równość $x + y + z = 0$. Wykazać, że

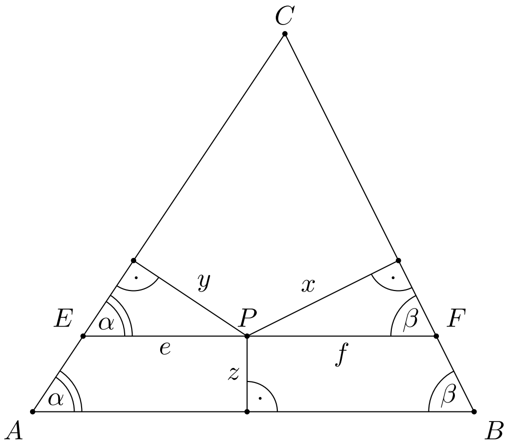
$$x \cdot 2^x + y \cdot 2^y + z \cdot 2^z \geqslant 0.$$

Rozwiązanie. Funkcja $f(x) = 2^x$ jest rosnąca, przy czym $f(0) = 1$. Z tego wynika, że $2^x - 1 < 0$ dla $x < 0$ i $2^x - 1 > 0$ dla $x > 0$. Innymi słowy, liczby x i $2^x - 1$ są jednakowego znaku lub obie równe zero. Wobec tego $x(2^x - 1) \geqslant 0$, czyli $x \cdot 2^x \geqslant x$. Analogicznie $y \cdot 2^y \geqslant y$ i $z \cdot 2^z \geqslant z$. Dodając te trzy nierówności stronami, otrzymamy

$$x \cdot 2^x + y \cdot 2^y + z \cdot 2^z \geqslant x + y + z = 0,$$

co kończy dowód.

C2. Dany jest trójkąt ABC. Wyznaczyć taki punkt P wewnątrz niego, by iloczyn odległości punktu P od prostych AB, BC i CA był możliwie największy.



Rozwiązanie. Przyjmijmy oznacznia widniejące na rysunku obok. Rozważmy najpierw te punkty P, dla których z przyjmuje pewną ustaloną wartość. Leżą one na pewnej prostej $EF \parallel AB$. Wtedy

$$xyz = f\sin\beta \cdot e\sin\alpha \cdot z = ef \cdot k,$$

przy czym k jest pewną stałą. Ponieważ suma $e + f = |EF|$ jest stała, iloczyny ef i xyz przyjmują największą wartość, gdy $e = f$. To oznacza, że punkt P, dla którego iloczyn xyz jest największy, leży na środkowej boku AB trójkąta ABC.

Analogicznie dowodzimy, że poszukiwany punkt P leży na pozostałych środkowych trójkąta ABC, jest to zatem jego środek ciężkości.

C3. W spotkaniu uczestniczy $2n$ osób, liczba $n \geqslant 1$ jest naturalna. Ustalono, że każde dwie nieznające się osoby mają różną liczbę znajomych. Każdy chce siedzieć przy stole wyłącznie ze swoimi znajomymi (niekoniecznie wszystkimi) albo sam. Dowieść, że wystarczy do tego n stołów.

Rozwiązanie. Osoby nieznające się mają różne liczby znajomych, więc osoby o równej liczbie znajomych są znajomymi. Wobec tego dla $i = 1, 2, \ldots, n$ przy i-tym stoliku można usadzić wszystkich tych, którzy mają $i - 1$ znajomych.

Wybierzmy jedną z pozostałych osób, o ile takie istnieją. Ma ona co najmniej n znajomych, czyli co najwyżej $n - 1$ nieznajomych. Ponieważ stolików jest n, taka osoba zna wszystkich przy pewnym stoliku, więc może przy nim usiąść. W taki sam sposób postępujemy kolejno ze wszystkimi pozostałymi osobami, w efekcie czego na koniec wszyscy będą siedzieć zgodnie z życzeniem.

C4. Niech $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wiadomo, że wielomian $P(x)^2$ ma wszystkie współczynniki całkowite. Dowieść, że wielomian $P(x)$ również ma wszystkie współczynniki całkowite.

Rozwiązanie. Niech $P(x)^2 = \sum_{k=0}^{2n} c_k x^k$. Wtedy

$$c_{2n-k} = 2a_{n-k} + \sum_{i=1}^{k-1} a_{n-i}a_{n-k+i} \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Korzystając z tego wzoru, dowodzimy indukcyjnie, że dla $k = 1, 2, \ldots, n$ liczba a_{n-k} jest w postaci ilorazu liczby całkowitej przez potęgę dwójki. Wobec tego dla pewnego całkowitego nieujemnego m można zapisać

$$P(x) = x^n + \frac{Q(x)}{2^m},$$

przy czym wielomian $Q(x)$ albo jest zerowy (wtedy teza zachodzi), albo ma współczynniki całkowite, z których co najmniej jeden jest nieparzysty. Rozważmy ten drugi przypadek. Przyjmijmy oznaczenia

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0, \qquad Q(x)^2 = d_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + d_1x + d_0,$$

niech także $b_i = 0$ dla $i \notin \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Wybierzmy takie j, dla którego b_j jest nieparzyste. Wtedy

$$d_{2j} = b_j^2 + 2\sum_{i=0}^{j-1} b_i b_{2j-i}$$

też jest liczbą nieparzystą. Z równości

$$P(x)^2 = x^{2n} + \frac{2^{m+1}Q(x)x^n + Q(x)^2}{2^{2m}}$$

wynika, że

$$c_{2j} = \frac{2^{m+1}b_{2j-n} + d_{2j}}{2^{2m}},$$

co prowadzi do wniosku, że $m = 0$, gdyż c_{2j} jest liczbą całkowitą. Z tego wynika, że $P(x) = x^n + Q(x)$, więc wielomian $P(x)$ ma wszystkie współczynniki całkowite.

C5. Liczby całkowite dodatnie a, b, u i v spełniają równość $au + bv = ab + 1$. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb postaci $ax + by$ dla całkowitych x i y, spełniających warunki $0 \leqslant x < u$ i $0 \leqslant y < v$. Przez B oznaczmy zbiór liczb postaci $ax + by - ab$, w której x i y są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności $u \leqslant x < b$ oraz $v \leqslant y < a$. Ze wszystkich elementów zbiorów A i B utworzono ciąg rosnący. Dowieść, że elementy zbiorów A i B występują w tym ciągu na zmianę.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że $A, B \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, ab - 1\}$. Na mocy równości $au + bv = ab + 1$ liczby a i b są względnie pierwsze. Wobec tego dla każdego całkowitego n kongruencja

$$n \equiv ax_n + by_n \pmod{ab}$$

wyznacza $x_n \in \{0, 1, \ldots, b - 1\}$ i $y_n \in \{0, 1, \ldots, a - 1\}$ w sposób jednoznaczny. Dla każdego $n \in \{0, 1, 2, \ldots, ab - 1\}$ zachodzi dokładnie jedna z możliwości:

$$n = ax_n + by_n \qquad \text{albo} \qquad n + ab = ax_n + by_n.$$

Niech D oznacza zbiór wszystkich liczb $n \in \{0, 1, 2, \ldots, ab-1\}$, spełniających pierwszą równość. Z treści zadania mamy

$$x_n - x_{n-1} \equiv u \pmod{b} \quad \text{i} \quad y_n - y_{n-1} \equiv v \pmod{a}.$$

Z tych dwóch kongruencji wynika, że dla zachodzą związki

$$x_{n-1} = \begin{cases} x_n - u, & \text{dla } x_n \geqslant u \\ x_n - u + b, & \text{dla } x_n < u, \end{cases} \qquad y_{n-1} = \begin{cases} y_n - v, & \text{dla } y_n \geqslant v \\ y_n - v + b, & \text{dla } y_n < v. \end{cases}$$

Te z kolei pozwalają dla $n \in \{0, 1, 2, \ldots, ab - 1\}$ wywnioskować równoważności

$$n \in A \iff n \in D \text{ i } n - 1 \notin D \qquad \text{oraz} \qquad n \in B \iff n \notin D \text{ i } n - 1 \in D.$$

Pokolorujmy na żółto te spośród liczb $0, 1, 2, \ldots, ab - 1$, które należą do zbioru D, a pozostałe – na niebiesko. Niech dodatkowo -1 i ab będą czarne. Dla liczb całkowitych $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant ab - 1$ nazwiemy *serią* takie kolejne liczby $k, k + 1, \ldots, l$, które są jednakowego koloru, innego niż kolory liczb $k - 1$ i $l + 1$. Z wykazanych równoważności wynika, że elementy zbioru A rozpoczynają żółte serie, a elementy zbioru B – niebieskie. Serie żółte i niebieskie występują oczywiście na zmianę, co kończy rozwiązanie zadania.