ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

XII Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2021 r.

Organizacja konkursu

Dwunasta edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2020/2021. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Organizację Ligi wspiera Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Bieżąca edycja została dofinansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w ramach projektu *Matematyka ma MOC*.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zainteresowanymi. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlm.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLM na Facebooku. Uczniowie uczestniczyli w konkursie w trzech następujących kategoriach:

- Junior (5 uczestników) – uczniowie klas 7 i 8 szkół podstawowych;
- Senior (13 uczestników) – uczniowie klas 1 i 2 szkół średnich po SP;
- Weteran (6 uczestników) – uczniowie klas 2 i 3 szkół średnich po gimnazjum.

Uczestnicy rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia, zestaw B do końca lutego, zestaw C do końca marca. Każdy z zestawów liczył po 8 zadań z różnych działów matematyki, przy czym Juniorzy rozwiązywali zadania 1–4, Seniorzy 3–6, a Weterani 5–8. Rozwiązania oceniane były przez Komisję WLM. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Komisja WLM

- Przewodniczący: dr Bartłomiej Bzdęga;
  wiceprzewodniczący: mgr Przemysław Pela.
- Zespół oceniający prace uczestników:
  dr hab. Małgorzata Bednarska-Bzdęga, Kacper Bem, dr Jędrzej Garnek, Patryk Matusiak, dr Piotr Mizerka, mgr Przemysław Pela, mgr Sylwester Swat, mgr Joanna Stróżyk, mgr Tomasz Śliwiński
- Zespół przygotowujący zestawy zadań:
  dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Mieczysław Krawiarz, Antoni Solarski, Klaudia Tarabasz, mgr Wojciech Wawrów.

Wyniki konkursu – Juniorzy

Nagroda II stopnia

Natalia Siwek (52)
Uczennica 8 klasy 93 Szkoły Podstawowej w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Georgy Stepanov (30)
Uczeń 8 klasy International School of Poznań.

Piotr Kreczyński (23)
Uczeń 7 klasy Szkoły Podstawowej Sióstr Urszulanek w Poznaniu.

Igor Kuzemko (20)
Uczeń 7 klasy Szkoły Podstawowej w Wirach.

Wyróżnienie

Jakub Sosulski (15)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej Sióstr Urszulanek w Poznaniu.

Wyniki konkursu – Seniorzy

Nagrody I stopnia

Aleksandra Strzelecka (110)
Uczennica 2 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Jarocinie.

Karol Musieliński (108)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagroda II stopnia

Kajetan Sarnecki (94)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Igor Szymczak (79)
Uczeń 2 klasy XXXVIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Klara Hofman (77)
Uczennica 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Franciszek Sowisz (76)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyróżnienia

Tymon Tomczak (63)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Paulina Czajkowska (54)
Uczenica 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyniki konkursu – Weterani

Nagrody I stopnia

Cezary Botta (118)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Oliwier Urbański (109)
Uczeń 3 klasy VII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagroda II stopnia

Antoni Rajtar (93)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Maksym Ratajczyk (71)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Paweł Felcyn (67)
Uczeń 3 klasy Liceum Ogólnokształcącego Towarzystwa Salezjańskiego w Pile.

Wyróżnienia

Grzegorz Świąder (28)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Zadania i szkice rozwiązań

Uwaga. Zamieszczone tu szkice są bardzo skrótowe, należy je zatem traktować jedynie jako wskazówki, dzięki którym można odtworzyć pełne rozwiązania.

Zadanie A1 *(autorzy: Joanna Politarczyk i Bartłomiej Bzdęga).*
W każdym wierzchołku kwadratu napisano pewną liczbę całkowitą dodatnią. Na środku każdego boku tego kwadratu zapisano iloczyn liczb napisanych w jego końcach. Suma liczb napisanych na środkach boków kwadratu wynosi 2021. Obliczyć sumę liczb napisanych w wierzchołkach kwadratu.

Szkic rozwiązania. Niech a, b, c, d będą liczbami napisanymi w kolejnych wierzchołkach kwadratu. Zachodzi wtedy równość

$$2021 = ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d).$$

Ponieważ $2021 = 43 \cdot 47$ jest rozkładem na czynniki pierwsze oraz $a + c > 1$ i $b+d > 1$, więc jedna z liczb $a+c$, $b+d$ jest równa 43, a druga 47. W obu przypadkach $a + b + c + d = 90$.

Zadanie A2 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach A i B mają miarę odpowiednio $30°$ i $105°$. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wyznaczyć miarę kąta BMC.

Szkic rozwiązania. Niech BD będzie wysokością trójkąta ABC opuszczoną na bok CA. Trójkąt BCD ma kąty o mierze $45°$ przy wierzchołkach B i C, a trójkąt ABD ma kąty o miarach $30°$ i $60°$ przy wierzchołkach odpowiednio A i B. Punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB trójkąta ABD, więc $|DM| = |BM|$, czyli trójkąt BDM jest równoboczny. Z równości $|CD| = |DB| = |DM|$ oraz $|\angle CDM| = 150°$ wynika, że $|\angle DMC| = 15°$. Wobec tego $|\angle CMB| = 60° - 15° = 45°$.

Zadanie A3 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności: $a > 2$, $b > 3$ i $c > 4$. Udowodnić, że

$$ab + bc + ca > a + b + c + 17.$$

Szkic rozwiązania. Z założeń wynikają nierówności:

$$a(b-1) > 4, \qquad b(c-1) > 9, \qquad c(a-1) > 4.$$

Po dodaniu ich stronami i uporządkowaniu otrzymamy tezę.

Zadanie A4 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Na szachownicy 8×8 ustawiono pewną liczbę wież, większą niż 1. Nazwijmy wieżę *spokojną*, jeśli atakuje co najwyżej dwie inne ustawione wieże. Wykazać, że przynajmniej dwie ustawione wieże są spokojne.

Szkic rozwiązania. Ponumerujmy kolejno wiersze i kolumny szachownicy liczbami od 0 do 7. Na każdym polu szachownicy napiszmy liczbę $8x + y$, w której x oznacza numer kolumny, a y numer wiersza. Wówczas wieża stojąca na polu z najmniejszą liczbą jest spokojna, bo ani nad nią, ani na lewo od niej nie ma żadnej innej wieży. Również wieża stojąca na polu z największą liczbą jest spokojna, bo ani pod nią, ani na prawo od niej nie ma żadnej innej wieży.

Zadanie A5 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Dzielnik d liczby naturalnej n nazwijmy *samotnym*, jeśli liczby $d + 1$ i $d - 1$ nie są dzielnikami n, a ponadto $d \neq 1$ i $d \neq n$. Wyznaczyć wszystkie liczby złożone, które nie mają samotnych dzielników.

Szkic rozwiązania. Niech n będzie liczbą złożoną bez samotnych dzielników oraz niech $d > 1$ będzie największym dzielnikiem n różnym od n. Z tego wynika, że $d - 1 \mid n$, w szczególności n jest liczbą parzystą, czyli $d = \frac{1}{2}n$. Z podzielności $d - 1 \mid n = 2d$ i $d - 1 \mid 2(d - 1)$ wnioskujemy, że $d - 1 \mid 2$, czyli $d = 2$ lub $d = 3$, a więc $n = 4$ lub $n = 6$. Bezpośrednio sprawdzamy, że liczby 4 i 6 są złożone i nie mają samotnych dzielników.

Zadanie A6 *(autor: Sylwester Swat).*
Trójkąt ABC ma kąt prosty przy wierzchołku C. Punkt M jest środkiem odcinka AC, a punkt N – środkiem odcinka BM. Punkty K i L są środkami ciężkości trójkątów odpowiednio CMN i ABN. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AMN. Punkty K, L, N, O leżą na jednym okręgu. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości proporcji $|AC| : |BC|$.

Szkic rozwiązania. Wybierzmy układ współrzędnych, w którym

$$C = (0, 0), \qquad B = (0, 1), \qquad A = (x, 0)$$

dla pewnego $x > 0$. Interesuje nas wartość x. Obliczamy kolejno:

$$M = \left(\tfrac{1}{2}x, 0\right), \qquad N = \left(\tfrac{1}{4}x, \tfrac{1}{2}\right), \qquad K = \left(\tfrac{1}{4}x, \tfrac{1}{6}\right), \qquad L = \left(\tfrac{5}{12}x, \tfrac{1}{2}\right).$$

Punkt O leży na symetralnej odcinka AM, więc $O = \left(\frac{3}{4}x, y\right)$ dla pewnego y. Z równości $|OM|^2 = |ON|^2$ obliczamy $y = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{4}$. Zauważmy, że $|\angle KNL| = 90°$. Z tego wynika, że punkty K, L, N, O leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $KO \perp LO$, co jest równoważne stwierdzeniu $\overrightarrow{KO} \circ \overrightarrow{LO} = 0$, które przekłada się na równanie dwukwadratowe

$$\tfrac{1}{2}x \cdot \tfrac{1}{3}x + \left(\tfrac{3}{16}x^2 + \tfrac{1}{12}\right)\left(\tfrac{3}{16}x^2 - \tfrac{1}{4}\right) = 0.$$

Jego jedynym rozwiązaniem rzeczywistym dodatnim jest $x = \frac{2}{9}\sqrt{3}$.

Zadanie A7 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Na płaszczyźnie leży $2n$ czerwonych prostych, każde dwie z nich się przecinają w innym punkcie. Każdy punkt przecięcia kolorujemy na biało lub czarno, ale z zachowaniem następujących reguł:

(1) na każdej czerwonej prostej jest dokładnie n punktów czarnych;

(2) każdy trójkąt wyznaczony przez trzy czerwone proste ma nieparzystą liczbę białych wierzchołków.

W zależności od n wyznaczyć liczbę kolorowań spełniających te warunki.

Szkic rozwiązania. Wyróżnijmy jedną z czerwonych prostych i nazwijmy ją ℓ. Pokolorujmy w dowolny sposób punkty przecięcia prostej ℓ z innymi czerwonymi prostymi, z zachowaniem warunku (1). Spróbujemy pokolorować pozostałe punkty, tak by warunki (1) i (2) były spełnione. Niech $K = \{k_1, \ldots, k_n\}$ będzie zbiorem tych czerwonych prostych, które przecinają prostą ℓ w punktach czarnych, a $L' = \{l_1, \ldots, l_{n-1}\}$ – w białych. Niech $L = L' \cup \{\ell\}$. Będziemy w skrócie pisać proste typu $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$.
Na mocy warunku (2) zastosowanego do prostej ℓ i dowolnych dwóch innych prostych wynika, że proste tego samego typu muszą się przecinać w białych punktach, a proste różnych typów – w czarnych. To jednoznacznie determinuje kolor każdego z punktów przecięcia. To kolorowanie spełnia warunek (1), gdyż każda prosta jest przecięta przez n prostych innego typu oraz $n-1$ prostych tego samego. Warunek (2) również jest spełniony, gdyż każdy trójkąt wyznaczają trzy proste tego samego typu (wtedy ma 3 białe wierzchołki) lub dwie proste tego samego typu i trzecia innego (wtedy ma 1 biały wierzchołek i 2 czarne).
Z powyższego wynika, że każde pokolorowanie punktów na prostej ℓ jednoznacznie determinuje kolorowanie spełniające warunki zadania, jest ich zatem $\binom{2n-1}{n}$.

Zadanie A8 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Wielomian P stopnia $n \geqslant 1$, o współczynnikach rzeczywistych, ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste, niektóre być może wielokrotne. Niech m oznacza liczbę różnych pierwiastków wielomianu P, a k – liczbę jego niezerowych współczynników. Dowieść, że jeśli $P(0) \neq 0$, to $n \leqslant mk$.

Szkic rozwiązania. Teza wynika z następującego faktu, który wykażemy indukcyjnie: Jeśli wielomian $W \not\equiv 0$ ma t-krotny pierwiastek rzeczywisty $x_0 \neq 0$, to ma on więcej niż t niezerowych współczynników.
Dla $t = 0$ jest to oczywiste. Przypuśćmy, że powyższy fakt jest prawdziwy dla pewnego $t \geqslant 0$ i rozważmy wielomian W, który ma pierwiastek x_0 krotności $t+1$. Niech s będzie krotnością pierwiastka 0 wielomianu W (może być $s = 0$) oraz $Q(x) = W(x)/x^s$. Pochodna wielomianu Q ma pierwiastek x_0 krotności t, więc liczba jej niezerowych współczynników jest większa niż t na mocy założenia indukcyjnego. Pozostaje zauważyć, że wielomian Q (a więc także wielomian W) ma o jeden niezerowy współczynnik więcej niż pochodna wielomianu Q.

Zadanie B1 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 oraz punkt P, który leży na zewnątrz tego kwadratu. Udowodnić, że $|AP| + |BP| + |CP| > 2$.

Szkic rozwiązania. Narysujmy koła K_A, K_B i K_C o promieniu 1 i środkach w punktach odpowiednio A, B i C. Jeśli punkt P znajduje się w co najwyżej jednym z tych kół, to teza zachodzi, bo wtedy co najmniej dwa z odcinków AP, BP, CP mają długośc większą od 1. Jeśli $P \in K_A \cap K_B$, to $|PC| > 1$ oraz $|AP| + |BP| > |AB| = 1$. Przypadek $P \in K_B \cap K_C$ jest analogiczny. Przypadek $P \in K_A \cap K_C$ nie zachodzi.

Zadanie B2 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Niech x będzie liczbą dodatnią. Każdą z liczb: $\sqrt{x}$, $\sqrt{2x}$, $\sqrt{3x}$ zaokrąglono w dół, do najbliższej liczby całkowitej. Pierwsze dwa zaokrąglenia wynoszą 44 i 63. Ile wynosi trzecie?

Szkic rozwiązania. Zachodzą nierówności: $44 \leqslant \sqrt{x} < 45$ i $63 \leqslant \sqrt{2x} < 64$. Z nich wynika, że $1936 \leqslant x < 2025$ i $1984{,}5 \leqslant x < 2048$, a więc $1984{,}5 \leqslant x < 2025$. Otrzymujemy stąd $77^2 < 5953{,}5 \leqslant 3x < 6075 < 78^2$, zatem $\lfloor\sqrt{3x}\rfloor = 77$.

Zadanie B3 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Mamy pustą szachownicę o wymiarach 8×8 pól. Ruch polega na położeniu po jednym pionku na każdym polu znajdującym się w wybranym wierszu lub kolumnie, przy czym na jednym polu może znajdować się wiele pionków. Wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę ruchów potrzebnych do tego, by na każdym polu szachownicy znalazła się inna (być może zerowa) liczba pionków.

Szkic rozwiązania. Ponumerujmy wiersze i kolumny szachownicy liczbami 0–7. Dla $k = 1, \ldots, 7$ kładziemy po jednym pionku na k-tym wierszu k razy oraz kładziemy po jednym pionku na k-tej kolumnie $8k$ razy. Liczba wykonanych ruchów to

$$1 + 2 + \ldots + 7 + 8(1 + 2 + \ldots + 7) = 252,$$

a liczbami pionków na polach szachownicy są różne liczby od 0 do 63.
Mniejsza liczba ruchów nie jest możliwa, bo najmniejsza liczba położonych pionków to $0+1+2+\ldots+63$, a wtedy liczba ruchów jest równa $\frac{1}{8}(0+1+2+\ldots+63) = 252$.

Zadanie B4 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Pewną liczbę naturalną zmniejszono o n procent i otrzymano w wyniku n. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości n.

Szkic rozwiązania. Szukamy liczb $n \in \{1, 2, \ldots, 99\}$, dla których liczba

$$\frac{n}{\left(1 - \frac{n}{100}\right)} = \frac{100n}{100 - n} = \frac{10000}{100 - n} - 100$$

jest naturalna. Jest to równoważne podzielności $100 - n \mid 10000$. Dzielnikami 10000 mniejszymi od 100 są: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80. Z tego wynika, że wszystkie możliwe wartości n to 20, 50, 60, 75, 80, 84, 90, 92, 95, 96, 98, 99.

Zadanie B5 *(autor: Patryk Matusiak).*
Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| > |BC|$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 2|\sphericalangle BAC|$. Dwusieczna kąta ACB przecina odcinek AB w punkcie D. Punkt E jest spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C. Punkt F leży na odcinku BC i spełnia warunek $EF \parallel AC$. Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie DEF przechodzi przez środek odcinka AC.

Szkic rozwiązania. Niech M będzie środkiem odcinka AC. Wtedy $|\angle CMD| = 90°$, gdyż $|\angle CAD| = |\angle ACD|$. Zauważmy, że $|\angle ABC| < 90°$, bo w przeciwnym razie trójkąt DEF by nie istniał. Ponadto $|\angle ABC| + |\angle BAC| > 2|\angle BAC| = |\angle ACB|$, więc $90° > |\angle ABC| = |\angle CDB|$, w szczególności punkt E leży na odcinku DB. Z równości $|\angle DEF| + |\angle DCF| = 180°$ wynika, że punkt C leży na okręgu opisanym na trójkącie DEF. Ponadto $|\angle CED| = 90°$, więc CD jest średnicą tego okręgu. Teza wynika teraz z tego, że $|\angle CMD| = 90°$.

Zadanie B6 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Udowodnić, że jeśli a, b, c są trzema różnymi liczbami dodatnimi, to

$$\tfrac{a}{|b-c|} + \tfrac{b}{|c-a|} + \tfrac{c}{|a-b|} > 2.$$

Szkic rozwiązania. Załóżmy, że $a < b, c$ – w innych przypadkach dowód jest analogiczny. Niech $b = a + x$ i $c = a + y$. Wtedy lewa strona nierówności jest równa

$$\tfrac{a}{|x-y|} + \tfrac{a+x}{y} + \tfrac{a+y}{x} > \tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{x} \geqslant 2.$$

Zadanie B7 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Niech $S(m)$ oznacza sumę cyfr zapisu dziesiętnego liczby naturalnej m. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n o następującej własności: dla każdego całkowitego dodatniego a, niebędącego potęgą 10, zachodzi nierówność $S(a^n) < S(a)^n$.

Szkic rozwiązania. Wykażemy, że $n = 5$. Zauważmy, że $S(11^4) = S(14641) = S(11)^4$, pozostaje zatem wykazać, że $S(a^5) < S(a)^5$ dla a niebędących potęgą 10. Zapiszmy

$$a = \sum_{i \geqslant 0} 10^i a_i \qquad \text{oraz} \qquad b_j = \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4+i_5=j} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} a_{i_4} a_{i_5},$$

przy czym $a_0, a_1, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Zachodzą wtedy następujące związki:

$$S\left(a^5\right) = S\left(\sum_{j \geqslant 0} 10^j b_j\right) \leqslant \sum_{j \geqslant 0} S\left(10^j b_j\right) = \sum_{j \geqslant 0} S\left(b_j\right) \leqslant \sum_{j \geqslant 0} b_j = S(a)^5,$$

przy czym ostatnia nierówność jest równością wtedy i tylko wtedy, gdy $b_j < 10$ dla wszystkich $j \geqslant 0$.
Jeśli $a = 10^k a_k$, to $a_k \geqslant 2$ i $b_{5k} = a_k^5 > 10$. W przeciwnym razie można wskazać takie różne liczby $k, m > 0$, że $a_k, a_m > 0$, a wtedy $b_{2k+3m} \geqslant \binom{5}{2} a_k^2 a_m^3 \geqslant 10$. W obu przypadkach wnioskujemy, że $S(a^5) < S(a)^5$.

Zadanie B8 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Rozstrzygnąć, czy istnieje rodzina prostych na płaszczyźnie o następującej własności: Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi jedna, dwie lub trzy proste z tej rodziny oraz żadne dwie proste z tej rodziny nie są równoległe.

Szkic rozwiązania. Przykładem takiej rodziny są proste o równaniach

$$\ell_t : y = tx + t^3 \qquad \text{dla} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Żadne z nich nie są równoległe, bo mają inne współczynniki kierunkowe.
Dla każdego punktu (x_0, y_0) proste ℓ_t, które przez ten punkt przechodzą, spełniają równanie $t^3 + x_0 t - y_0 = 0$. Jest to równanie sześcienne (z niewiadomą t) o współczynnikach rzeczywistych, więc ma ono co najmniej jedno, ale co najwyżej trzy rozwiązania rzeczywiste. Z tego wynika, że przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi jedna, dwie lub trzy proste ℓ_t.

Zadanie C1 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Prostopadłościany o wymiarach $2 \times 1 \times 1$ mają dwa rodzaje ścian – mniejszą kwadratową i większą prostokątną. Czy z takich prostopadłościanów można zbudować sześcian w taki sposób, żeby żadne dwa z nich nie sąsiadowały ze sobą całą większą ścianą? Uzasadnić odpowiedź.

Szkic rozwiązania. To jest możliwe. Prostopadłościan $1 \times 1 \times 2$ nazywać będziemy w skrócie klockiem. Najpierw zbudujemy „komin” – czyli wydrążony prostopadłościan o podstawie kwadratu 3×3 i wysokości 6 z klocków zorientowanych poziomo. Do środka włożymy trzy klocki zorientowane pionowo – w ten sposób otrzymamy prostopadłościan $3 \times 3 \times 6$. Z czterech takich prostopadłościanów można złożyć sześcian o krawędzi 6, który spełnia żądane warunki.

Zadanie C2 *(autorzy: Małgorzata Bednarska-Bzdęga i Bartłomiej Bzdęga).*
Liczba naturalna n ma wszystkie cyfry różne i nie występuje wśród nich 0, ani 1. Ponadto liczba n jest podzielna przez każdą ze swoich cyfr. Czy ta liczba może być:

(a) sześciocyfrowa?

(b) siedmiocyfrowa?

Uzasadnić odpowiedź.

Szkic rozwiązania.

(a) To jest możliwe, przykładem takiej liczby jest 897624 (podzielność przez każdą z cyfr sprawdzamy rachunkiem lub wykorzystując cechy podzielności).

(b) Zauważmy najpierw, że wśród cyfr tej liczby nie może wystąpić 5, bo wtedy ostatnią jej cyfrą musiałoby być 0, ponieważ dzieliłaby się przez 5 i jakąś cyfrę parzystą. Z tego wynika, że cyframi tej liczby są 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Ale liczba o takich cyfrach nie dzieli się przez 9. To dowodzi, że taka liczba siedmiocyfrowa nie istnieje.

Zadanie C3 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
W pewnym trójkącie długość jednego z boków jest równa średniej arytmetycznej długości pozostałych boków. Analogicznie jest dla wysokości – długość jednej z nich jest średnią arytmetyczną długości dwóch pozostałych. Udowodnić, że ten trójkąt jest równoboczny.

Szkic rozwiązania. Długości boków trójkąta możemy zapisać jako $a-x$, a, $a+x$ dla pewnych $a, x > 0$. Analogicznie – wysokości jako $h-y$, h, $h+y$ dla pewnych $h, y > 0$. Chcemy wykazać, że $x = 0$. Licząc pole trójkąta na trzy sposoby, otrzymujemy równości

$$\tfrac{1}{2}(a-x)(h+y) = \tfrac{1}{2}ah = \tfrac{1}{2}(a+x)(h-y),$$

a po przekształceniach $ay - hx = xy = hx - ay$. Z równości liczb przeciwnych $ay - hx = hx - ay$ wynika, że obie te liczby są równe 0. W takim razie $xy = 0$, czyli $x = 0$ lub $y = 0$. Jeśli $x = 0$, to koniec dowodu. Jeśli $y = 0$, to z równości $ay - hx = xy$ otrzymujemy znów $x = 0$.

Zadanie C4 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Na tablicy napisano kolejno 2021 liczb. Każda z nich, z wyjątkiem pierwszej i ostatniej, jest większa od średniej arytmetycznej liczby poprzedniej i następnej. Udowodnić, że na tablicy znajduje się liczba, która jest różna od wszystkich pozostałych.

Szkic rozwiązania. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$ będą napisanymi liczbami. Mamy

$$a_k > \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \qquad \text{dla} \quad 1 < k < 2021,$$

równoważnie $a_k - a_{k-1} > a_{k+1} - a_k$. To oznacza, że różnice pomiędzy kolejnymi liczbami tworzą ciąg malejący, a więc żadna liczba nie może pojawić się na tablicy więcej niż dwukrotnie. To kończy dowód, bo napisano nieparzystą ilość liczb.

Zadanie C5 *(autorka: Małgorzata Bednarska-Bzdęga).*
W każdym polu prostokątnej tabeli znajduje się liczba rzeczywista. W każdej kolumnie pokolorowano na niebiesko te pola, które zawierają najmniejszą liczbę w tej kolumnie. W każdym wierszu pokolorowano na czerwono te pola, które zawierają największą liczbę w tym wierszu. Niektóre pola były pokolorowane i na niebiesko, i na czerwono. Wykazać, że liczby we wszystkich takich polach są równe.

Szkic rozwiązania. Niech $L(x, y)$ oznacza liczbę napisaną na przecięciu pola o współrzędnych (x, y) (czyli w kolumnie numer x i wierszu numer y). Przypuśćmy, że w pola o współrzędnych (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) pokolorowano i na niebiesko, i na czerwono. Stąd wynikają nierówności

$$L(x_1, y_1) \geqslant L(x_2, y_1) \geqslant L(x_2, y_2) \geqslant L(x_1, y_2) \geqslant L(x_1, y_1).$$

Każda z nich musi być równością.

Zadanie C6 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Cztery różne liczby całkowite dodatnie a, b, c, n spełniają równość $a^2+b^2+c^2 = 3n^2$. Dowieść, że

$$\max\left\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\right\} > \sqrt{n}.$$

Szkic rozwiązania. Bez straty ogólności niech $b = a + x$ i $c = a + y$, przy czym $0 < x < y$. Przypuśćmy, że wbrew tezie $y \leqslant \sqrt{n}$. Wtedy $3n^2 < 3(a + \sqrt{n})^2$, a więc $a > n - \sqrt{n} \geqslant (\sqrt{n} - 1)^2$, w szczególności $a > 1$. Wreszcie $y \leqslant \sqrt{n} \leqslant \sqrt{a}+1 < \sqrt{3a}$. Z równości

$$n^2 = a^2 + \tfrac{2}{3}a(x+y) + \tfrac{1}{3}(x^2+y^2)$$

oraz ostatniej nierówności otrzymamy następujące oszacowania:

$$\left(a + \tfrac{x+y}{3}\right)^2 < n^2 < a^2 + \tfrac{2}{3}a(x+y) + \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{1}{9}y^2 + \tfrac{2}{9}xy + \tfrac{2}{3}a < \left(a + \tfrac{x+y+1}{3}\right)^2.$$

Mamy więc mamy sprzeczność $x + y < 3(n - a) < x + y + 1$.

Zadanie C7 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Na wykresie paraboli o równaniu $y = x^2$ wybrano punkty A, B, C, o obu współrzędnych całkowitych. Rozstrzygnąć, czy pole trójkąta ABC może być równe 2021.

Szkic rozwiązania. Niech $A = (a, a^2)$, $B = (b, b^2)$ i $C = (c, c^2)$, przy czym bez straty ogólności niech $b = a+x$ i $c = a+x+y$ dla pewnych całkowitych $x, y \geqslant 0$. Ze wzoru na pole trójkąta w układzie współrzędnych otrzymamy

$$2[ABC] = |ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a| = |(a-b)(b-c)(c-a)| = xy(x+y).$$

Pozostaje zauważyć, że liczby $2 \cdot 43 \cdot 47$ nie da się przedstawić w postaci $xy(x + y)$ przy całkowitych $x, y \geqslant 0$.

Zadanie C8 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Dane są czworościany foremne $A_1B_1C_1S$, $A_2B_2C_2S$ i $A_3B_3C_3S$. Odcinki A_2A_3, B_3B_1 i C_1C_2, leżą na jednej płaszczyźnie Π i przecinają się w punkcie S. Punkty A_1, B_2 i C_3 leżą po tej samej stronie płaszczyzny Π. Udowodnić, że środki okręgów opisanych na trójkątach $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ i $C_1C_2C_3$ leżą na jednej prostej.

Szkic rozwiązania. Niech $o_A = o(O_A, r_A)$, $o_B = o(O_B, r_B)$ i $o_C = o(O_C, r_C)$ będą tymi okręgami, ponadto niech $\mathcal{A}$ oznacza płaszczyznę $A_1A_2A_3$, analogicznie $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$. Przez S_i oznaczmy punkt symetryczny do S względem środka ciężkości czworościanu $A_iB_iC_iS$ dla $i = 1, 2, 3$.
Mamy $S_1A_1 \perp SA_1$ oraz $A_2A_3 \parallel B_1C_1 \perp S_1A_1$, więc $S_1A_1 \perp \mathcal{A}$. Analogicznie $S_iA_i \perp \mathcal{A}$, $S_iB_i \perp \mathcal{B}$, $S_iC_i \perp \mathcal{C}$ dla $i = 1, 2, 3$.
Niech $s_i = s(S_i, r_i)$ będzie sferą, $r_i = |S_iA_i| = |S_iB_i| = |S_iC_i|$ dla $i = 1, 2, 3$. Sfera s_i jest styczna do płaszczyzny $\mathcal{A}$ w punkcie A_i; w szczególności prosta O_AA_i jest styczna w punkcie A_i do sfery s_i dla $i = 1, 2, 3$. Z tego wynika, że potęga punktu O_A względem każdej z tych sfer jest równa r_A^2. Analogicznie jest dla punktów O_B i O_C, zatem te trzy punkty leżą na jednej prostej – osi potęgowej sfer s_1, s_2, s_3.