ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

XIII Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2022 r.

Organizacja konkursu

Trzynasta edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2021/2022. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Organizację Ligi wspiera Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Bieżąca edycja została dofinansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w ramach projektu *Matematyka ma MOC*.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zainteresowanymi. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlm.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLM na Facebooku. Uczniowie uczestniczyli w konkursie w trzech następujących kategoriach:

- Junior (28 uczestników) – uczniowie klas 7 i 8 szkół podstawowych;
- Senior (12 uczestników) – uczniowie klas 1 i 2 szkół średnich;
- Weteran (7 uczestników) – uczniowie klas 3 i 4 szkół średnich.

Uczestnicy rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia, zestaw B do końca lutego, zestaw C do końca marca. Każdy z zestawów liczył po 8 zadań z różnych działów matematyki, przy czym Juniorzy rozwiązywali zadania 1–4, Seniorzy 3–6, a Weterani 5–8. Rozwiązania oceniane były przez Komisję WLM. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Komisja WLM

- Przewodniczący: dr Bartłomiej Bzdęga;
  wiceprzewodniczący: mgr Przemysław Pela.
- Zespół oceniający prace uczestników:
  dr hab. Małgorzata Bednarska-Bzdęga, Kacper Bem, dr Jędrzej Garnek,
  Patryk Matusiak, dr Piotr Mizerka, mgr Przemysław Pela,
  mgr inż Sylwester Swat
- Zespół przygotowujący zestawy zadań:
  Cezary Botta, dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Mieczysław Krawiarz,
  Antoni Solarski, Klaudia Tarabasz, mgr Wojciech Wawrów, Patryk Zubilewicz.

Wyniki konkursu – Juniorzy

Nagrody I stopnia

Adam Pawlak (97)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej nr 1 w Biedrusku.

Michał Wojkiewicz (96)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej nr 3 w Środzie WLKP.

Zuzanna Kozimor (90)
Uczennica 8 klasy Szkoły Podstawowej im. Powstańców Wielkopolskich w Wyrzysku.

Nagroda II stopnia

Piotr Przysuszyński (83)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej Zakonu Pijarów w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Wojciech Skarbek (76)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej nr 3 w Złotowie.

Marta Zachaczewska (73)
Uczennica 7 klasy Szkoły Podstawowej STO w Pile.

Wyróżnienia

Aleksandra Pińkowska (58)
Uczennica 8 klasy Szkoły Podstawowej STO w Pile.

Jakub Pawlaczyk (57)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej Sióstr Nazaretanek w Kaliszu.

Bartosz Aleksanderek (54)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej nr 12 w Lesznie.

Igor Kuzemko (53)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej im. Powstańców Wielkopolskich w Wirach.

Adam Sieniawski (49)
Uczeń 7 klasy Katolickiej Publicznej Szkoły Podstawowej w Śremie.

Zofia Dudziec (47)
Uczennica 8 klasy Szkoły Podstawowej im. Jana Brzechwy w Rokietnicy.

Wyniki konkursu – Seniorzy

Nagrody I stopnia

Karol Musieliński (110)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Tymoteusz Bultrowicz (100)
Uczeń 2 klasy XXXVIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagroda II stopnia

Stanisław Wojtysiak (84)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Barbara Błoszyk (60)
Uczennica 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Michał Zimniewicz (58)
Uczeń 2 klasy Liceum Ogólnokształcącego Towarzystwa Salezjańskiego w Pile.

Wyróżnienia

Zuzanna Osses (52)
Uczennica 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wewronika Zakrzewska (52)
Uczennica 2 klasy XXXVIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Vitalii Galaychuk (45)
Uczeń 2 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Kępnie.

Nina Wojciechowska (42)
Uczennica 1 klasy Liceum Ogólnokształcącego św. Marii Magdaleny w Poznaniu.

Wyniki konkursu – Weterani

Nagroda I stopnia

Michał Redmer (119)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagroda II stopnia

Dawid Bugajewski (103)
Uczeń 3 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Kościanie.

Nagrody III stopnia

Igor Szymczak (74)
Uczeń 3 klasy XXXVIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Oliwier Necelman (66)
Uczeń 3 klasy XXXVIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyróżnienia

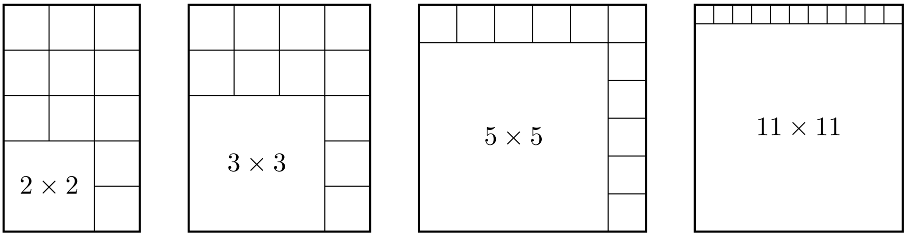
Kajetan Sarnecki (40)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Aleksandra Strzelecka (39)
Uczennica 3 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Jarocinie.

Zadania i szkice rozwiązań

Zadanie A1 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Prostokąt podzielono na 12 kwadratów. Jedenaście z nich to kwadraty o boku długości 1, a długość boku dwunastej płytki jest liczbą naturalną $a > 1$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości a.

Szkic rozwiązania. Wartości 2, 3, 5 i 11 są możliwe, o czym świadczą poniższe rysunki.



Należy jeszcze uzasadnić, że nie ma innych. Zauważmy najpierw, że najmniejszy prostokąt, który można podzielić na kwadrat o boku a i kilka kwadratów jednostkowych ma wymiary $a \times (a+1)$, czyli jego pole jest równe $a^2 + a$. Prostokąt z zadania ma pole $a^2 + 11$. Oznacza to, że $a^2 + a \leqslant a^2 + 11$, czyli $a \leqslant 11$.

W poniższej tabeli zamieszczono w kolejnych wierszach: liczbę a, pole prostokąta z zadania $P = a^2 + 11$ oraz możliwe wymiary takiego prostokąta.

a	4	6	7	8	9	10
P	37	47	60	75	92	111
	1×37	1×47	1×60 2×30 3×20 4×15 5×12 6×10	1×75 3×25 5×15	1×92 2×46 4×23	1×111 3×37

Wymiary prostokąta muszą być równe co najmniej a, ponieważ mieści się w nim kwadrat o boku a. Żaden prostokąt z powyższej tabeli nie spełnia tego warunku. Wynika z tego, że niemożliwe są wartości a inne niż wymienione na początku rozwiązania.

Zadanie A2 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
W pięciokącie $ABCDE$ wszystkie boki mają długość 2, a ponadto kąty wewnętrzne przy wierzchołkach B i E są proste. Obliczyć pole tego pięciokąta.

Szkic rozwiązania. Pole pięciokąta $ABCDE$ jest sumą pól trójkątów ABC, DEA i ACD. Z dwóch pierwszych można złożyć kwadrat o boku 2, więc suma ich pól wynosi 4. Odcinki AC i AD są przekątnyni kwadratu o boku 2, więc każdy z nich ma długość $2\sqrt{2}$.

Trójkąt ACD jest zatem równoramienny ($|AC| = |AD| = 2\sqrt{2}$), więc jego wysokość poprowadzona z wierzchołka A opada na punkt A', który jest środkiem odcinka CD. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$|AA'|^2 = |AC|^2 - |A'C|^2 = (2\sqrt{2})^2 - 1^2 = 8 - 1 = 7,$$

czyli $|AA'| = \sqrt{7}$ i pole trójkąta ACD wynosi $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7}$.

W takim razie że pięciokąt $ABCDE$ ma pole równe $4 + \sqrt{7}$.

Zadanie A3 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
W iloczynie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100$ możemy zastąpić niektóre liczby ich odwrotnościami. Rozstrzygnąć, czy jest możliwe uzyskanie w taki sposób wyniku 2022.

Szkic rozwiązania. W rozkładzie uzyskanej liczby na czynniki pierwsze nie ma liczb pierwszych większych niż 100, natomiast liczba 2022 ma dzielnik pierwszy 337. Z tego wynika, że nie można otrzymać liczby 2022.

Zadanie A4 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Niech $a = 2^{2021}$, $b = 3^{2021}$, $c = 4^{2021}$, $d = 5^{2021}$. Uzasadnić, że $5^a < 4^b < 3^c < 2^d$.

Szkic rozwiązania. Najpierw zauważmy, że

$$5^a = (5^8)^{2^{2018}}, \qquad 4^b = (4^{27})^{3^{2018}}, \qquad 3^c = (3^{64})^{4^{2018}}, \qquad 2^d = (2^{125})^{5^{2018}} \tag{1}$$

oraz

$$5^8 < (4^2)^8 = 4^{16} < 4^{27} < \underbrace{9^{32}}_{=3^{64}} < 10^{33} = \underbrace{(10^3)^{11}}_{=1000^{11}} < \underbrace{(2^{10})^{11}}_{=1024^{11}} = 2^{110} < 2^{125}.$$

Stąd $5^8 < 4^{27} < 3^{64} < 2^{125}$, co w połączeniu z równościami (1) i oczywistymi nierównościami $2^{2018} < 3^{2018} < 4^{2018} < 5^{2018}$ kończy dowód.

Zadanie A5 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Prosta ℓ oraz okręgi o_1 i o_2 są styczne w punkcie T. Okrąg o, przechodzący przez punkt T, przecina prostą ℓ oraz okręgi o_1 i o_2 w punktach odpowiednio P, K i L, różnych od T. Proste PK i PL przecinają po raz drugi okręgi o_1 i o_2 w punktach odpowiednio A i B. Wykazać, że punkty A, B i T leżą na jednej prostej.

Szkic rozwiązania. Niech $X \neq T$ będzie takim punktem na prostej ℓ, że punkt T leży na odcinku PX. Oznaczmy $|\sphericalangle PKT| = \varphi$ i $|\sphericalangle PLT| = \psi$.

Rozważmy najpierw punkty A, K, P – są tu dwa przypadki. Jeśli punkt A leży na odcinku KP, to $|\sphericalangle ATP| = \varphi$ (twierdzenie o stycznej ℓ i cięciwie AT okręgu o_1). W drugim przypadku punkt K leży na odcinku AP. Wtedy $|\sphericalangle AKT| = 180^\circ - \varphi$ (kąt przyległy) oraz $|\sphericalangle ATX| = |\sphericalangle AKT| = 180^\circ - \varphi$ (twierdzenie o stycznej ℓ i cięciwie TK okręgu o_1). Wreszcie $|\sphericalangle ATP| = \varphi$ (kąt przyległy do $\sphericalangle ATX$), czyli tak samo jak w pierwszym przypadku. Analogicznie dowodzimy, że $|\sphericalangle BTP| = \psi$.

Jeśli okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie, to na czworokącie $KTLP$ można opisać okrąg, więc $|\sphericalangle ATB| = \varphi + \psi = 180^\circ$, z czego wynika teza. Okręgi o_1 i o_2 mogą być również styczne wewnętrznie – wtedy $\varphi = \psi$ (kąty wpisane, oparte na łuku PT okręgu o) i $|\sphericalangle ATB| = |\varphi - \psi| = 0^\circ$, z czego znów wynika teza.

Zadanie A6 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. *Flota Rebeliantów* liczy $n + 1$ statków kosmicznych, ponumerowanych od 0 do n. Złe *Imperium Galaktyczne* częściowo zablokowało łączność – statki o numerach a i b mogą się komunikować wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a + b$ jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym nieujemnym. Wykazać, że mimo tego nadanie komunikatu z każdego statku na każdy inny jest wykonalne (choć niekoniecznie bezpośrednio).

Szkic rozwiązania. Rozważmy statek o numerze $a > 0$. Niech t będzie najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną, dla której $a \leqslant 2^t$. Wtedy $a > 2^{t-1}$. Rozważany statek może się komunikować ze statkiem o numerze $b = 2^t - a$, przy czym $b \geqslant 0$ oraz $b < 2^t - 2^{t-1} = 2^{t-1} < a$. Z tego wynika, że każdy statek z numerem większym od 0 może komunikować się z pewnym statkiem o numerze mniejszym niż jego numer. Powtarzając to rozumowanie, dojdziemy do wniosku, że każdy statek może (pośrednio) komunikować się ze statkiem z numerem 0. W takim razie każde dwa statki mogą się komunikować.

Zadanie A7 *(autor: Patryk Zubilewicz).*
Dla każdego ciągu (a) określamy ciąg (s) jego średnich arytmetycznych wzorem $s_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg (a) różnych liczb całkowitych dodatnich, o następującej własności:

$$a_{n+1} > s_n \text{ dla } 2 \mid n \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+1} < s_n \text{ dla } 2 \nmid n.$$

Szkic rozwiązania. Taki ciąg istnieje, przykładem może być ciąg określony wzorem

$$a_n = \begin{cases} n & \text{dla } 2 \mid n, \\ 5n & \text{dla } 2 \nmid n. \end{cases}$$

Wyrazy ciągu (a) są całkowite dodatnie. Są one różne, gdyż $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ jest rosnącym ciągiem liczb nieparzystych, natomiast $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ – parzystych.

Jeśli $n = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k, to $a_{n+1} = 10k + 5$ oraz

$$s_n = \frac{(2 + 4 + \ldots + 2k) + 5(1 + 3 + \ldots + 2k - 1)}{2k} = 3k + \tfrac{1}{2} < a_{n+1}.$$

Jeśli $n = 2k-1$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k, to $a_{n+1} = 2k$ oraz

$$s_n \geqslant \frac{5(1+3+\ldots+2k-1)}{2k-1} > \frac{5(1+3+\ldots+2k-1)}{2k} = \tfrac{5}{2}k > a_{n+1}.$$

Zadanie A8 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Ciąg (c), w którym $c_1 = 0$, spełnia równanie $c_{n+1} = c_n^2 + 1$ dla każdego $n \geqslant 1$. Udowodnić, że dla każdej liczby pierwszej p istnieją takie liczby naturalne $k > l \geqslant 1$, że $p \mid c_k + c_l$.

Szkic rozwiązania. W ciągu (c) znajdziemy dwa różne wyrazy, które dają tę samą resztę z dzielenia przez p, gdyż jest to ciąg nieskończony, a reszt z dzielenia przez p jest skończenie wiele. Spośród wszystkich par (c_n, c_m) wybierzmy więc taką, w której $n > m$, $p \mid c_n - c_m$ oraz liczba n jest najmniejsza z możliwych. Rozważmy dwa przypadki.

Jeśli $m = 1$, to $c_m = 0$, więc $p \mid c_n - c_m = c_n + c_m$.

Jeśli $m > 1$, to też $n > 1$, więc możemy zapisać

$$p \mid c_n - c_m = (c_{n-1}^2 + 1) - (c_{m-1}^2 + 1) = (c_{n-1} - c_{m-1})(c_{n-1} + c_{m-1}).$$

Wobec minimalności n niemożliwe jest, by $p \mid c_{n-1} - c_{m-1}$. Z tego wynika, że $p \mid c_{n-1} + c_{m-1}$.

Zadanie B1 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Liczby rzeczywiste a, b, c mają tę własność, że każda z nich jest większa od iloczynu dwóch pozostałych. Udowodnić, że wśród tych liczb jest co najmniej jedna liczba dodatnia.

Szkic rozwiązania. Jeśli $a > 0$ lub $b > 0$, to teza jest spełniona. W przeciwnym razie $a \leqslant 0$ i $b \leqslant 0$, ale wtedy $c > ab \geqslant 0$ i teza również zachodzi.

Zadanie B2 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Na płaszczyźnie, w pewnym punkcie, znajduje się pchła, która co jakiś czas wykonuje skok. Każdy kolejny skok jest dwa razy dłuższy od poprzedniego. Wykazać, że pchła nigdy nie znajdzie się dwa razy w tym samym punkcie.

Szkic rozwiązania. Przypuśćmy, że w pewnym momencie pchła znajduje się w punkcie A i dobierzmy taką jednostkę miary, żeby jej kolejne n skoków miały długości $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$. Punkt, w którym pchła znalazła się po n skokach oznaczmy przez B. Zachodzi nierówność

$$|AB| \leqslant 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

więc w kolejnym skoku, który ma długość 2^n, pchła nie może wrócić do punktu A. Wobec dowolności wyboru punktu A oraz liczby całkowitej $n > 0$, teza została udowodniona.

Zadanie B3 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Sześciocyfrowe liczby naturalne a i b mają te same cyfry, tylko w odwrotnym porządku. Udowodnić, że liczba $a^2 - b^2$ dzieli się przez 99.

Szkic rozwiązania. Zapiszmy

$$\begin{aligned} a &= i + 10j + 100k + 1000l + 10000m + 100000n, \\ b &= n + 10m + 100l + 1000k + 10000j + 100000i, \end{aligned}$$

Przy czym i, j, k, l, m, n są cyframi. Ponieważ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, wystarczy zatem wykazać, że $9 \mid a - b$ i $11 \mid a + b$. Wynika to z równości

$$\begin{aligned} a - b &= 99999(n-i) + 9990(m-j) + 900(l-k) \\ &= 9\Big((11111(n-i) + 1110(m-j) + 100(l-k)\Big) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} a + b &= 100001(n+i) + 10010(m+j) + 1100(k+l) \\ &= 11\Big(9091(n+i) + 910(m+j) + 100(k+l)\Big). \end{aligned}$$

Zadanie B4 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Dany jest czworokąt $ABCD$. Punkt P leży na odcinku AD, ponadto zachodzą równości:

$$|AB| = |BP|, \qquad |BC| = |CP|, \qquad |CD| = |DP|.$$

Udowodnić, że suma miar kątów ABP, BCP i CDP jest równa 180°.

Szkic rozwiązania. Niech

$$|\sphericalangle APB| = \alpha, \qquad |\sphericalangle BPC| = \beta, \qquad |\sphericalangle CPD| = \gamma.$$

Wówczas $\alpha + \beta + \gamma = |\sphericalangle APD| = 180^\circ$. Z równości danych w zadaniu wynika, że

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ABP| + |\sphericalangle BCP| + |\sphericalangle CDP| &= (180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\beta) + (180^\circ - 2\gamma) \\ &= 3 \cdot 180^\circ - 2(\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ. \end{aligned}$$

Zadanie B5 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Na nieskończonej szachownicy ustawiono n wież. Nazwijmy wieżę *spokojną*, jeżeli

atakuje co najwyżej dwie inne wieże. W zależności od n wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę spokojnych wież.

Szkic rozwiązania. Niech $s(n)$ będzie najmniejszą możliwą liczbą spokojnych wież dla n wież ustawionych na szachownicy. Wykażemy, że

$$s(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1, \\ 2 & \text{dla } n = 2, \\ 3 & \text{dla } n \in \{3, 4\}, \\ 4 & \text{dla } n \geqslant 5. \end{cases}$$

Przypadki $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$ są natychmiastowe, ponieważ w nich każda wieża jest spokojna.

Dla $n = 4$ i $n = 5$ wykażemy, że liczba wież niespokojnych wynosi co najwyżej 1. Dla dowodu nie wprost, niech W_1 i W_2 będą dwiema różnymi wieżami niespokojnymi. Oznaczmy przez $\mathcal{X}$ zbiór wież atakowanych przez wieżę W_1, a $\mathcal{Y}$ – przez W_2. Jeśli wieże W_1 i W_2 się atakują, to $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$, więc liczba wież wynosi co najmniej $|\mathcal{X}| + |\mathcal{Y}| \geqslant 6$ – sprzeczność. W przeciwnym razie $W_1, W_2 \notin \mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Zauważmy, że $|\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}| \leqslant 2$. Liczba wież jest zatem równa przynjmniej

$$2 + |\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}| = 2 + |\mathcal{X}| + |\mathcal{Y}| - |\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}| \geqslant 2 + 3 + 3 - 2 = 6$$

i znów mamy sprzeczność. Wynika z tego, że dla $n = 4$ mamy co najmniej 3 spokojne wieże, a dla $n = 5$ – co najmniej 4.

Dla $n = 4$ otrzymamy trzy wieże spokojne, kładąc wieże na polach $A1$, $A2$, $A3$, $B2$.

Dla parzystych $n = 2k > 5$ otrzymujemy cztery wieże spokojne, wybierając pola

$$A1,\ B1,\ A2,\ B2,\ A3,\ B3,\ \ldots,\ Ak,\ Bk.$$

W przypadku nieparzystego $n = 2k+1 \geqslant 5$ dokładamy jedną wieżę na polu $A[k+1]$.

Pozostaje wykazać, że dla $n \geqslant 6$ zawsze znajdą się co najmniej 4 spokojne wieże. Wykazaliśmy wcześniej, że jest to prawda dla $n = 5$ i niech to będzie warunek początkowy rozumowania indukcyjnego. Rozważmy dowolne ustawienie $n \geqslant 6$ wież.

Przypadek 1. Pewna spokojna wieża A atakuje co najwyżej jedną inną wieżę – nazwijmy ją B, jeśli taka istnieje. Zabierzmy wieżę A – mamy wtedy $n - 1$ wież, wśród których są co najmniej cztery wieże spokojne na mocy założenia indukcyjnego. Przywracając wieżę A, dodajemy jedną wieżę spokojną i zamieniamy co najwyżej jedną wieżę spokojną na niespokojną (może to być jedynie wieża B). Wynika z tego, że w tym przypadku dla n wież również mamy co najmniej 4 spokojne wieże.

Przypadek 2. Każda spokojna wieża atakuje dokładnie dwie inne wieże. Wówczas niemożliwe jest, by wszystkie wieże znajdowały się w jednym wierszu. Rozważmy

„najwyższy” niepusty wiersz szachownicy – znajdują się w nim co najmniej dwie wieże, bo gdyby była tam jedna, atakowałaby najwyżej jedną inną wieżę, w dół od niej. Dwie skrajne wieże w tym wierszu są spokojne, ponieważ jedna z nich może atakować tylko w dół i w prawo, a druga tylko w dół i w lewo. Analogicznie dowodziny, że w „najniższym” wierszu również dwie skrajne wieże są spokojne, co łącznie daje nam co najmniej 4 różne spokojne wieże.

Zadanie B6 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Ustalmy liczbę rzeczywistą dodatnią x. Zbiór A, do którego należy liczba 1, ma następującą własność:

$$\text{jeśli } a \in A, \text{ to } \lfloor ax \rfloor \in A \text{ i } \lceil ax \rceil \in A.$$

Wyznaczyć wszystkie liczby x, dla których z powyższych własności wynika, że zbiór A zawiera wszystkie liczby całkowite dodatnie.

Szkic rozwiązania. Odpowiedź: zbiorem wszystkich takich liczb x jest przedział $(1, 2)$.

Jeśli $x \leqslant 1$, to możliwe jest $A = \{0, 1\}$. Jeżeli $x = 2$, to A może być zbiorem potęg dwójki. Dla pozostałych przypadków rozważmy ciąg

$$(c) = \big(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \ldots\big) = \Big(\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil, \lfloor 2x \rfloor, \lceil 2x \rceil, \lfloor 3x \rfloor, \ldots\Big).$$

Przypadek 1. $x \in (1, 2)$. Dla każdego całkowitego dodatniego k zachodzą nierówności:

$$\begin{aligned} \lceil kx \rceil &\leqslant \lfloor kx \rfloor + 1, \\ \lfloor (k+1)x \rfloor &\leqslant (k+1)x = kx + x < kx + 2 \leqslant \lceil kx \rceil + 2. \end{aligned}$$

Wynika z nich, że $c_{k+1} \leqslant c_k + 1$ dla każdego całkowitego dodatniego k, więc każda liczba naturalna od c_1 do c_{2n} jest wyrazem ciągu $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Jest jasne, że jeśli $1, 2, \ldots, n \in A$, to $c_1, c_2, \ldots, c_{2n} \in A$. Ponadto $c_1 = \lfloor x \rfloor = 1$ i $c_{2n} = \lceil nx \rceil > n$. Wobec tego mamy krok indukcyjny: jeśli $1, 2, \ldots, n \in A$, to $n + 1 \in A$. Indukcję rozpoczyna $1 \in A$ z treści zadania.

Przypadek 2. $x > 2$. Niech $x = 2 + \varepsilon$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ i niech m będzie taką liczbą naturalną, że $m\varepsilon > 1$. Ciąg (c) jest niemalejący, gdyż dla każdego całkowitego dodatniego k zachodzą nierówności

$$\lfloor kx \rfloor \leqslant \lceil kx \rceil < kx + 1 < kx + 1 + \varepsilon = (k+1)x - 1 < \lfloor (k+1)x \rfloor.$$

Ponadto

$$c_{2m} = \lceil m(2 + \varepsilon) \rceil = \lceil 2m + m\varepsilon \rceil \geqslant 2m + 2.$$

Wynika z tego, że w ciągu $(c_1, c_2, \ldots, c_{2m})$ brakuje co najmniej dwóch liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, c_{2n}\}$. Jedną z brakujących jest 1. Inna brakująca liczba w ogóle nie wystąpi w ciągu (c) ze względu na jego monotoniczność. Ta liczba może się zatem nie pojawić w zbiorze A.

Zadanie B7 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
W zależności od liczby pierwszej $p \geqslant 3$ wyznaczyć wszystkie uporządkowane trójki (a, b, c) liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, dla których każda z liczb: $a + bc$, $b + ca$, $c + ab$ dzieli się przez p.

Szkic rozwiązania. Z treści zadania wynika, że

$$p \mid a(a + bc) - b(b + ca) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

więc $a = b$ lub $a + b \in \{0, p\}$, przy czym nie musimy rozważać przypadku $a + b = 0$, ponieważ ta równość wymusza $a = b = 0$. To samo można analogicznie wykazać dla par (b, c) i (c, a). Wobec tego mamy, z dokładnością do symetrii, dwa przypadki:

Przypadek $a = b = c$. Wtedy $p \mid a + a^2 = a(a + 1)$, więc $a = 0$ lub $a = p - 1$. Otrzymujemy tu dwie trójki: $(0, 0, 0)$ i $(p - 1, p - 1, p - 1)$.

Przypadek $a = b$, $c = p - a$. Wtedy $p \mid c + ab = p - a + a^2$, więc $p \mid a^2 - a = a(a - 1)$. Z tego wynika, że $a = 0$ lub $a = 1$. Jeśli $a = 0$, to $c = p$ – sprzeczność. Jeżeli $a = 1$, to $b = 1$ i $c = p - 1$. W tym przypadku otrzymaliśmy trójkę $(1, 1, p - 1)$. Ze względu na symetrię, mamy dodatkowo trójki $(1, p - 1, 1)$ i $(p - 1, 1, 1)$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie pięć otrzymanych trójek (a, b, c) spełnia warunki zadania.

Zadanie B8 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach BC i DE, przy czym $|\sphericalangle PAQ| = 60^\circ$. Punkt R leży na odcinku PQ i spełnia warunek $|PR| \cdot |EQ| = |QR| \cdot |BP|$. Punkt S jest symetryczny do R względem prostej AQ. Udowodnić, że punkt S leży na odcinku EF.

Szkic rozwiązania. Niech E' i F' będą odbiciami symetrycznymi punktów odpowiednio E i F względem prostej AQ. Oznaczmy przez S' punkt przecięcia się odcinków $E'F'$ i PQ. Obraz punktu S' w symetrii względem prostej AQ leży na odcinku EF, więc wystarczy udowodnić, że $R = S'$.

Niech $\alpha = |\sphericalangle PAF'|$ i $\beta = |\sphericalangle FAQ| = |\sphericalangle F'AQ|$. Z równości

$$\alpha + \beta = 60^\circ, \qquad |\sphericalangle BAF| = 120^\circ$$

wynika, że $|\sphericalangle BAP| = \alpha$. Ponadto $|AF'| = |AF| = |AB|$, więc punkt F' jest symetryczny do punktu B względem prostej AP. Stąd

$$|\sphericalangle PF'E'| = 360^\circ - |\sphericalangle AF'P| - \sphericalangle|AF'E'| = 360^\circ - |\sphericalangle ABP| - |\sphericalangle AFE| = 120^\circ.$$

Ponadto $|\sphericalangle QE'F'| = |\sphericalangle QEF| = 120^\circ = |\sphericalangle PF'S'|$, więc $PF' \parallel QE'$, czyli trójkąty $PF'S'$ i $QE'R'$ są podobne. Z treści zadania, symetrii względem prostych AP i AQ oraz wspomnianego podobieństwa otrzymujemy

$$\frac{|PR|}{|QR|} = \frac{|BP|}{|EQ|} = \frac{|PF'|}{|QE'|} = \frac{|PS'|}{|QS'|},$$

z czego wynika, że $S' = R$.

Zadanie C1 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Liczba naturalna n nie jest podzielna przez 3, ani przez 5, a ponadto spełnia nierówność $1 < n < 90$. Wykazać, że mając dany kąt o mierze n°, można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki kąt o mierze 1°.

Szkic rozwiązania. Za pomocą cyrkla i linijki możemy skonstruować kąt o mierze 60°. Możemy również dodawać, odejmować i połowić kąty. Połowiąc dwukrotnie kąt o mierze 60°, otrzymamy kąt o mierze 15°. Niech r będzie resztą z dzielenia liczby n przez 15. Kąt o mierze r° otrzymujemy z kąta o mierze n° poprzez odjęcie kąta o mierze 15° odpowiednią liczbę razy. Liczba r nie dzieli się ani przez 3, ani prze 5.

Przypadek 1. $r \in \{1, 2, 4, 8\}$. Kąt o mierze 1° konstruujemy przez połowienie odpowiednią liczbę razy kąta o mierze r°.

Przypadek 2. $r \in \{7, 11, 13, 14\}$. Konstruujemy kąt o mierze $s^\circ = (15 - r)^\circ$. Tutaj $s \in \{8, 4, 2, 1\}$, więc postępujemy tak samo, jak w przypadku 1.

Zadanie C2 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Liczbę $\sqrt{x}$ zaokrąglono w dół do najbliższej liczby całkowitej, a liczbę $\sqrt[3]{x}$ zaokrąglono w górę do najbliższej liczby całkowitej. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $x > 0$, dla których oba te zaokrąglenia są równe.

Szkic rozwiązania. Mamy do rozwiązania równość

$$\lceil \sqrt[3]{x} \rceil = \lfloor \sqrt{x} \rfloor. \tag{2}$$

Z nierówności

$$\sqrt{x} - 1 < \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lceil \sqrt[3]{x} \rceil < \sqrt[3]{x} + 1$$

otrzymujemy $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} < 2$. Jeśli $x > 27$, to

$$\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x}(\sqrt[6]{x} - 1) \geqslant \sqrt[3]{27}(\sqrt[6]{27} - 1) = 3(\sqrt{3} - 1) > 2.$$

Z tego wynika, że $x \leqslant 27$. Wtedy lewa strona równości (2) należy do zbioru $\{1, 2, 3\}$, więc prawa również. Rozważmy zatem trzy przypadki.

Przypadek 1. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1$ i $\lceil \sqrt[3]{x} \rceil = 1$. Pierwsza równość ma miejsce dla $x \in [1, 4)$, a druga dla $x \in (0, 1]$. Częścią wspólną obu przedziałów jest $\{1\}$.

Przypadek 2. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2$ i $\lceil \sqrt[3]{x} \rceil = 2$. Pierwsza równość ma miejsce dla $x \in [4, 9)$, a druga dla $x \in (1, 8]$. Częścią wspólną obu przedziałów jest $[4, 8]$.

Przypadek 3. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 3$ i $\lceil \sqrt[3]{x} \rceil = 3$. Pierwsza równość ma miejsce dla $x \in [9, 16)$, a druga dla $x \in (8, 27]$. Częścią wspólną obu przedziałów jest $[9, 16)$.

Odpowiedź: Zbiorem wszystkich poszukiwanych liczb jest $\{1\} \cup [4, 8] \cup [9, 16)$.

Zadanie C3 *(autorzy: Tomasz Śliwiński i Bartłomiej Bzdęga).*
Prostokąty $ABFC$ i $ADFE$ spełniają równości $|AB| = |AD| = a$ i $|BF| = |DF| = b$. Dowieść, że pole części wspólnej tych dwóch prostokątów jest większe lub równe $\frac{1}{2}ab$.

Szkic rozwiązania. Niech $\mathcal{P}$ oznacza pole części wspólnej danych prostokątów. Jeśli $a = b$, to prostokąty $ABFC$ i $ADFE$ są pokrywającymi się kwadratami, czyli $\mathcal{P} = a^2 > \frac{1}{2}a^2$. Dalej bez utraty ogólności przyjmujemy, że $a < b$. Niech P będzie punktem przecięcia odcinków AE i BF, a Q – odcinków AC i DF.

Ponieważ $AE \parallel DF$ i $P \in AE$, $Q \in DF$, otrzymujemy $AP \parallel FQ$; analogicznie $AQ \parallel PF$. Czworokąt $APFQ$, który nas intersuje, jest więc równoległobokiem. W dodatku ma on oś symetrii AF, jest więc rombem.

Odcinek AF jest przekątną prostokąta $ABFC$, więc $|AF| > b$. Odcinek PQ łączy punkty leżące na prostych AF i BC, pomiędzy którymi odległość wynosi a, zatem $|PQ| \geqslant a$. Z tych nierówności wynika, że

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}|AF| \cdot |PQ| > \frac{1}{2}ab.$$

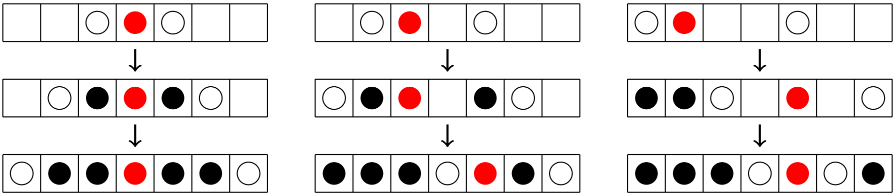
Zadanie C4 *(autorzy: Patryk Zubilewicz i Bartłomiej Bzdęga).*
Na każdym polu szachownicy 7×7 stoi jeden pionek. Nazwijmy *ruchem* następujący proces:
Wybieramy trzy pionki stojące w tej samej kolumnie lub w tym samym wierszu (niekoniecznie na sąsiednich polach), następnie zdejmujemy te dwa spośród nich, pomiędzy którymi stoi trzeci.
Przypuśćmy, że za pomocą takich ruchów doprowadziliśmy do tego, że na szachownicy został tylko jeden pionek. Na którym polu może stać ten pionek?

Szkic rozwiązania. Wykażemy, że ten pionek mógł stać na każdym polu szachownicy, z wyjątkiem brzegowych.

Nazwijmy *ruchem wstecznym* proces polegający na wyborze dowolnego pionka i postawieniu po jednym pionku na jednym z wolnych pól nad i pod wybranym pionkiem, albo po lewej i po prawej jego stronie (w obu przypadkach niekoniecznie na sąsiednich polach). Zaczynamy od szachownicy z jednym pionkiem, a celem jest zapełnienie jej w całości za pomocą ruchów wstecznych. Chcemy odpowiedzieć na pytanie: na którym polu może stać pierwszy pionek, aby wypełnienie szachownicy było możliwe? Jest ono równoważne pytaniu postawionemu w treści zadania.

Teraz jest jasne, że nie można zacząć od pionka postawionego na brzegu szachownicy. Jeśli stoi w narożniku, to nie można wykonać żadnego ruchu wstecznego, a jeśli nie stoi w narożniku, to możemy dostawiać pionki tylko w wzdłuż jednej brzegowej kolumny lub wiersza.

Wykażemy, że jeśli pionek stoi na polu innym niż brzegowe, to można zapełnić całą szachownicę. Rozważmy najpierw jednowymiarową wersję tego zadania. W zależności od położenia pierwszego pionka, postępowanie przedstawiono na poniższych rysunkach. Pionek koloru czerwonego jest wybranym pionkiem w danym ruchu wstecznym, a dwa pionki białe – dostawionymi.



W pozostałych położeniach pierwszego pionka postępujemy symetrycznie. Powyższe rozumowanie dowodzi, że jeśli pierwszy pionek nie znajduje się na brzegu danej kolumny lub wiersza, to możemy zapełnić tę kolumnę lub wiersz.

Postępowanie w przypadku początkowego pionka stojącego na polu innym niż brzegowe pole szachownicy jest następujące: najpierw zapełniamy wiersz, w którym znajduje się ten pionek. Otrzymaliśmy 7 kolumn, w każdej po jednym pionku innym niż brzegowy – zapełniamy je po kolei tą samą metodą co wiersz, otrzymując zapełnioną szachownicę.

Zadanie C5 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (m, n), dla których równanie

$$|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-m| = n$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Szkic rozwiązania. Rozważmy następujące przedziały:

$$I_0 = (-\infty, 1); \qquad I_m = [m, +\infty); \qquad I_k = [k, k+1) \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Jeśli $x \in I_k$ dla pewnego $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, to równanie z zadania przyjmuje postać

$$(x-1) + (x-2) + \ldots + (x-k) - (x-k-1) - (x-k-2) - \ldots - (x-m) = n,$$

a po uproszczeniu

$$(2k-m)x = n + k(k+1) - \tfrac{1}{2}m(m+1).$$

Jeżeli $m \neq 2k$ lub $n + k(k+1) - \frac{1}{2}m(m+1) \neq 0$, to równanie ma co najwyżej jedno rozwiązanie w przedziale I_k. Jeśli $m = 2k$ i $n + k(k+1) - \frac{1}{2}m(m+1) = 0$, to równanie spełniają wszystkie $x \in I_k$. Równoważnie:

$$m = 2k, \qquad n = \tfrac{1}{2}m(m+1) - k(k+1) = k(2k+1) - k(k+1) = k^2.$$

Szukanymi parami są wszystkie $(m,n)=(2k,k^2)$ dla całkowitych dodatnich k.

Zadanie C6 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
W ciągu niemalejącym $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ występują wyłącznie liczby całkowite dodatnie. Każda liczba występuje w nim dokładnie tyle razy, ile wynosi największy wykładnik potęgi dwójki dzielącej tę liczbę. Początkowe wyrazy wyglądają następująco:

$$2,4,4,6,8,8,8,10,12,12,14,16,16,16,16,18,20,20,\ldots.$$

Udowodnić, że $a_n > n$ dla wszystkich całkowitych dodatnich n.

Szkic rozwiązania. Wybierzmy dowolne całkowite dodatnie n i niech $A=a_n$. Przez $v_2(m)$ oznaczamy najwyższy wykładnik potęgi dwójki dzielącej liczbę m. W ciągu skończonym $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ każda liczba całkowita dodatnia $m<A$ występuje dokładnie $v_2(m)$ razy, a liczba A występuje co najwyżej $v_2(A)$ razy. Wynika z tego, że

$$n \leqslant v_2(1)+v_2(2)+v_2(3)+\ldots+v_2(A-1)+v_2(A)=v_2(A!).$$

Z drugiej strony, na mocy wzoru Legendre'a mamy

$$v_2(A!)=\left\lfloor \tfrac{A}{2}\right\rfloor+\left\lfloor \tfrac{A}{4}\right\rfloor+\left\lfloor \tfrac{A}{8}\right\rfloor+\ldots<\tfrac{A}{2}+\tfrac{A}{4}+\tfrac{A}{8}+\ldots=A.$$

Łącząc powyższe dwie nierówności, otrzymamy $a_n=A>n$.

Zadanie C7 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Czworokąt wypukły $ABCD$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Iloczyn pól trójkątów ABS i CDS jest równy iloczynowi pól trójkątów BCS i DAS. Niech I_a, I_b, I_c, I_d będą środkami sfer wpisanych w czworościany odpowiednio $DABS$, $ABCS$, $BCDS$, $CDAS$. Proste AI_a i CI_c przecinają płaszczyznę BDS w punktach odpowiednio K_a i K_c. Analogicznie, proste BI_b i DI_d przecinają płaszczyznę ACS w punktach odpowiednio K_b i K_d. Dowieść, że punkty K_a, K_b, K_c, K_d leżą na jednej płaszczyźnie.

Szkic rozwiązania. Niech L_a oznacza punkt przecięcia płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego $D(AS)B$ i prostej BD, analogicznie L_c dla kąta $B(CS)D$ i prostej BD. Na mocy twierdzenia o dwusiecznej kąta dwuściennego oraz warunków zadania, mamy

$$\frac{|BL_a|}{|DL_a|}=\frac{[ABS]}{[ADS]}=\frac{[CBS]}{[CDS]}=\frac{|BL_c|}{|DL_c|}.$$

Z tego wynika, że punkty L_a i L_c pokrywają się; niech L będzie ich wspólnym oznaczeniem. Płaszczyzny dwusieczne kątów dwuściennych $D(AS)B$ i $B(CS)D$ przecinają się zatem wzdłuż prostej SL, leżącej na płaszczyźnie BDS. Proste AI_a i CI_c są zawarte w tych płaszczyznach, więc punkty K_a i K_c też leżą na prostej SL, w szczególności punkty S, K_a i K_c są współliniowe. Analogicznie dowodzimy, że punkty S,

K_b i K_d są współliniowe. Z dwóch ostatnich faktów wynika, że punkty K_a, K_b, K_c, K_d leżą na dwóch przecinających się prostych, więc leżą na jednej płaszczyźnie.

Zadanie C8 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Dany jest trójkąt równoboczny ABC, w którym $|AB| = n$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej n. Rozważmy łamane bez samoprzecięć, mające początek w punkcie A i koniec w punkcie B, spełniające obie poniższe własności:

(1) cała łamana jest zawarta w trójkącie ABC,

(2) każdy odcinek łamanej jest równoległy do jednego z boków trójkąta i ma całkowitą długość.

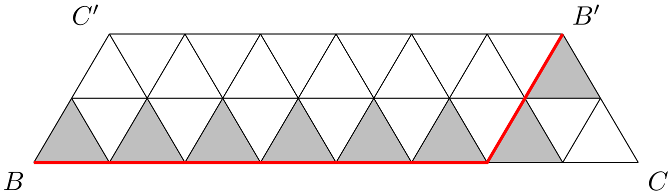
Niech L_n będzie liczbą tych łamanych. Dowieść, że istnieją takie stałe $a, b > 1$, że

$$a^{n^2} \leqslant L_n \leqslant b^{n^2} \text{ dla wszystkich naturalnych } n \geqslant 1.$$

Szkic rozwiązania. Podzielmy dany trójkąt równoboczny na n^2 trójkątów równobocznych o boku 1, zwanych dalej jednostkowymi. Łamana z treści zadania przebiega wzdłuż linii podziału.

Narysujmy łuk AB okręgu o środku C. Łamana wraz z tym łukiem ogranicza pewien zbiór jednostkowych trójkątów. Różnym łamanym odpowiadają różne zbiory, a są one podzbiorami n^2-elementowego zbioru wszystkich trójkątów jednostkowych. Wynika z tego, że $L_n \leqslant 2^{n^2}$.

Zauważmy, że $L_0 = 1$ (trójkąt ABC i łamana zdegenerowane) i $L_1 = 2$. Jest to początek indukcji, w której wykażemy, że $L_n \geqslant (\sqrt[4]{2})^{n^2}$. Ustalmy $n \geqslant 3$ i załóżmy, że $L_m \geqslant (\sqrt[4]{2})^{m^2}$ dla wszystkich $m < n$. Niech B' i C' leżą odpowiednio na odcinkach AC i AB, przy czym $|AB'| = |AC'| = n - 2$. Naszą łamaną konstruujemy w następujący sposób. Najpierw w trójkącie $AB'C'$ wybieramy łamaną z punktu A do B', co możemy uczynić na L_{n-2} sposobów. Następnie z punktu B' przechodzimy do B tak jak na rysunku wzdłuż czerwonej linii.



Każdy jednostkowy odcinek łamanej, który jest bokiem jednego z n zacienionych trójkątów, możemy niezależnie zamienić na dwa pozostałe boki tego trójkąta. Łącznie daje to 2^n możliwości przejścia z punktu B' do B. Na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L_n \geqslant L_{n-2} \cdot 2^n \geqslant (\sqrt[4]{2})^{(n-2)^2} \cdot 2^n = (\sqrt[4]{2})^{n^2+4} > (\sqrt[4]{2})^{n^2},$$

co kończy dowód.

Autor sprawozdania: dr Bartłomiej Bzdęga;
recenzenci: dr hab. Małgorzata Bednarska Bzdęga, mgr Wojciech Wawrów.