ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

XIV Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2023 r.

Organizacja konkursu

Czternasta edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2022/2023. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Organizację WLM wspiera Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zainteresowanymi. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlm.wmi.amu.edu.pl* (dzięki uprzejmości Michała Redmera strona WLM nabrała świeżości), a także profil WLM na Facebooku. Uczniowie uczestniczyli w konkursie w trzech następujących kategoriach:

- Junior (9 uczestników) – uczniowie klas 7 i 8 szkół podstawowych;
- Senior (44 uczestników) – uczniowie klas 1 i 2 szkół średnich;
- Weteran (16 uczestników) – uczniowie klas 3, 4 i 5 szkół średnich.

Uczestnicy rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia, zestaw B do końca lutego, zestaw C do końca marca. Każdy z zestawów liczył po 8 zadań z różnych działów matematyki, przy czym juniorzy rozwiązywali zadania 1–4, seniorzy 3–6, a weterani 5–8. Rozwiązania oceniane były przez Komisję WLM. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Komisja WLM

- Przewodniczący: dr Bartłomiej Bzdęga;
  wiceprzewodniczący: dr Jędrzej Garnek, mgr Przemysław Pela.
- Zespół oceniający prace uczestników:
  dr hab. Małgorzata Bednarska-Bzdęga, Kacper Bem, dr Jędrzej Garnek, Patryk Matusiak, dr Piotr Mizerka, mgr inż. Sylwester Swat, mgr inż. Tomasz Michał Śliwiński.
- Zespół przygotowujący zestawy zadań:
  dr Bartłomiej Bzdęga, Michał Redmer, Antoni Solarski, Klaudia Tarabasz, Patryk Zubilewicz.

Wyniki konkursu – Juniorzy

Nagrody I stopnia

Paulina Berlińska (119)
Uczennica 6 klasy Szkoły Podstawowej nr 38 w Poznaniu.

Julian Kuryłłowicz-Kaźmierczak (111)
Uczeń 5 klasy Niepublicznej Szkoły Podstawowej im. Świętej Rodziny w Poznaniu.

Nagroda II stopnia

Marta Zachaczewska (86)
Uczennica 8 klasy Szkoły Podstawowej Społecznego Towarzystwa Oświatowego w Pile.

Nagrody III stopnia

Michał Tyrakowski (49)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej nr 2 w Skórzewie.

Maja Palacz (43)
Uczennica 8 klasy Piątkowskiej Szkoły Społecznej w Poznaniu.

Emma Adamczyk (41)
Uczennica 8 klasy Publicznej Szkoły Podstawowej nr 52 Specto w Poznaniu.

Wyniki konkursu – Seniorzy

Nagrody I stopnia

Szymon Anders (107)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Michał Wojkiewicz (104)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Piotr Przysuszyński (102)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody II stopnia

Aleksandra Żyniewicz (98)
Uczennica 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Stanisław Wojtysiak (93)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Jakub Pawlaczyk (84)
Uczeń 1 klasy III Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Aryna Shramianok (83)
Uczennica 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Natan Mysakowski (79)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyróżnienia

Zuzanna Osses (74)
Uczennica 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Igor Kuzemko (72)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Mateusz Suliga (71)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyniki konkursu – Weterani

Nagroda I stopnia

Karol Musieliński (119)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody II stopnia

Igor Szymczak (88)
Uczeń 4 klasy XXXVIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Oliwier Necelman (85)
Uczeń 4 klasy XXXVIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Filip Heś (82)
Uczeń 4 klasy VII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagroda III stopnia

Kajetan Sarnecki (76)
Uczeń 4 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyróżnienia

Tymoteusz Bultrowicz (44)
Uczeń 3 klasy XXXVIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Emanuel Gawroński (43)
Uczeń 3 klasy III Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Zadania i szkice rozwiązań

Zadanie A1 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Dane są dwie różne liczby rzeczywiste dodatnie. Jeśli obie te liczby powiększymy o mniejszą z nich, to ich iloczyn wzrośnie trzykrotnie. Ile razy wzrósłby ich iloczyn, gdybyśmy powiększyli obie te liczby o większą?

Szkic rozwiązania. Niech x będzie mniejszą liczbą, a y – większą. Zależność z zadania można opisać równaniem

$$3xy = (x+x)(y+x) = 2x(x+y).$$

Otrzymujemy stąd $3y = 2x + 2y$, a więc $y = 2x$. Teraz wystarczy obliczyć

$$(x+y)(y+y) = (x+2x)\cdot 2y = 3x\cdot 2y = 6xy.$$

Wobec tego, gdybyśmy obie te liczby powiększyli o większą z nich, ich iloczyn wzrósłby sześciokrotnie.

Zadanie A2 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Prostopadłościenne pudełko o podstawie 17×17 i wysokości 7 jest szczelnie wypełnione 289 *patyczkami* – prostopadłościanami $1\times 1\times 7$. Patyczek nazwiemy *ustawionym pionowo*, jeśli jego najdłuższa krawędź jest prostopadła do podstawy pudełka. Uzasadnić, że co najmniej dwa patyczki są ustawione pionowo.

Szkic rozwiązania. Rozważmy tylko te patyczki, które mają jedną ścianę na podstawie pudełka. Patyczki ustawione pionowo zajmują na podstawie pudełka kwadrat 1×1, a ustawione poziomo – prostokąt 1×7. Niech a będzie liczbą tych pierwszych, a b – tych drugich. Podstawa pudełka ma pole $17^2 = 289$, więc otrzymujemy równanie

$$a + 7b = 289 = 7\cdot 41 + 2,$$

równoważnie $a = 7(41-b)+2$. Ponieważ $a \geqslant 0$, musi być $b \leqslant 41$, a stąd $a \geqslant 2$.

Zadanie A3 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Na przekątnej AC równoległoboku $ABCD$ leży punkt P, przy czym

$$|AB| = |AP|, \qquad |AD| = |DP|, \qquad |BP| = |CP|.$$

Udowodnić, że $|\sphericalangle ABP| = 2|\sphericalangle APD|$.

Szkic rozwiązania. Niech $\varphi = |\sphericalangle APD| = |\sphericalangle PAD|$ (bo $|AD| = |DP|$). Mamy $|\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle DAP| = \varphi$ (bo $BC \parallel AD$). Z równości $|BP| = |CP|$ wynika, że $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PCB| = \varphi$. Kąt APB jest kątem zewnętrznym przy wierzchołku P trójkąta BPC, więc $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB| = 2\varphi$. Dowód kończy równość $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle APB| = 2\varphi$, gdyż $|AB| = |AP|$.

Zadanie A4 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Dane są dwie liczby naturalne dwucyfrowe a i b, niepodzielne przez 10. Liczba a' powstaje z a przez zamianę cyfr miejscami, tak samo b' z b. Udowodnić, że jeśli $ab = a'b'$, to iloczyn cyfr jedności liczb a i b jest równy iloczynowi cyfr dziesiątek liczb a i b.

Szkic rozwiązania. Zapiszmy $a = 10k + l$ i $b = 10m + n$, przy czym k, l, m, n są niezerowymi cyframi. Wtedy $a' = 10l + k$ i $b' = 10n + m$. Przekształcamy równość $ab = a'b'$:

$$(10k + l)(10m + n) = (10l + k)(10n + m),$$

$$100km + 10kn + 10lm + ln = 100ln + 10lm + 10kn + km,$$

$$99km = 99ln,$$

Z ostatniej równości wynika, że $km = ln$. Jest to teza zadania.

Zadanie A5 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x &= \left|\sqrt{x+y} - \sqrt{z+x}\right| \\ y &= \left|\sqrt{y+z} - \sqrt{x+y}\right| \\ z &= \left|\sqrt{z+x} - \sqrt{y+z}\right| \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych x, y, z.

Szkic rozwiązania. Układ równań jest symetryczny – załóżmy więc, że $x \leqslant y \leqslant z$ (inne przypadki rozwiązuje się analogicznie). Wtedy

$$x = \sqrt{z+x} - \sqrt{x+y}, \qquad y = \sqrt{y+z} - \sqrt{x+y}, \qquad z = \sqrt{y+z} - \sqrt{z+x}.$$

Z powyższych równości wynika, że $y = z + x$, a zatem $0 \leqslant x \leqslant y = z + x \leqslant z$. Wobec tego $y = z$ i $x = 0$.
Z drugiego równania otrzymujemy $y = \sqrt{2y} - \sqrt{y}$, równoważnie $y = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{y}$. Stąd $y = z = 0$ lub $y = z = 3 - 2\sqrt{2}$.
Bezpośrednio sprawdzamy, że trójki $(0, 0, 0)$ i $(0, 3 - 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$ spełniają dany układ. Pozostaje jeszcze dodać, że ze względu na symetrię mamy jeszcze dwa rozwiązania: $(3 - 2\sqrt{2}, 0, 3 - 2\sqrt{2})$ i $(3 - 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}, 0)$.

Zadanie A6 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Na oceanie leżą wyspy A, B i C, na których jest odpowiednio a, b i c miast. Każde dwa miasta mają połączenie lotnicze wtedy i tylko wtedy, gdy leżą na różnych wyspach. Turysta chce odwiedzić każde z miast dokładnie jeden raz, podróżując wyłącznie samolotami, a na końcu wrócić do miasta, w którym zaczął podróż. Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich, dla których jest to możliwe.

Szkic rozwiązania. Bez utraty ogólności niech $a \geqslant b \geqslant c$. Szukane trójki (a, b, c) to te, które spełniają nierówność $a \leqslant b + c$. Wynika to z dwóch następujących obserwacji:
(1) Jeżeli $a > b + c$, to $a > \frac{1}{2}(a + b + c)$, czyli na wyspie A jest więcej niż połowa wszystkich miast. Z tego wynika, że w ewentualnej podróży trzeba by było dwa razy z rzędu odwiedzić miasto na wyspie A, co nie jest możliwe.
(2) Jeśli $a \leqslant b + c$, to odwiedzamy kolejno miasta na następujących wyspach:

$$\underbrace{(ABAC)(ABAC)\ldots(ABAC)}_{a-b\text{ razy}}\underbrace{(ABC)(ABC)\ldots(ABC)}_{b+c-a\text{ razy}}\underbrace{(AB)(AB)\ldots(AB)}_{b-c\text{ razy}}.$$

Zadanie A7 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Liczby całkowite dodatnie m i n spełniają nierówność $n > m$ oraz podzielność $n^m \mid m^n$. Udowodnić, że istnieje taka liczba pierwsza p, że $p^n \mid n^{n-m}$.

Szkic rozwiązania. Z nierówności $n > m$ wynika, że istnieje taka liczba pierwsza p, która w rozkładzie n na czynniki pierwsze występuje z wykładnikiem α większym od wykładnika β w rozkładzie m na czynniki pierwsze. Wykażemy, że jest to poszukiwana liczba pierwsza.
Z podzielności $n^m \mid m^n$ otrzymujemy $m\alpha \leqslant n\beta \leqslant n(\alpha - 1)$, więc $n \leqslant (n - m)\alpha$. Z ostatniej nierówności wynika, że $p^n \mid n^{n-m}$.

Zadanie A8 *(autor: Michał Redmer).*
Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $|AB| < |AC|$. Dwusieczne kątów ABC i BCA przecinają się w punkcie I oraz przecinają wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka A w punktach odpowiednio P i Q. Okrąg opisany na trójkącie CPQ przecina po raz drugi prostą AC w punkcie D. Znając

$$\alpha = |\sphericalangle CAB|, \qquad \beta = |\sphericalangle ABC|, \qquad \gamma = |\sphericalangle BCA|,$$

wyznaczyć miarę kąta QID.

Szkic rozwiązania. Zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned}|\sphericalangle DPI| &= |\sphericalangle QPI| - |\sphericalangle QPD| = |\sphericalangle BPE| - |\sphericalangle QCD| \\ &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle DAI|,\end{aligned}$$

więc na czworokącie $APID$ można opisać okrąg. W takim razie

$$\begin{aligned}|\sphericalangle QID| &= |\sphericalangle PID| - |\sphericalangle PIQ| = 180^\circ - |\sphericalangle PAD| - 180^\circ + |\sphericalangle BIC| \\ &= -90^\circ + \gamma + 180^\circ - \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\gamma = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha.\end{aligned}$$

Zadanie B1 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Czy istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c, dla których zachodzą równości:

$$\mathtt{NWD}(a, b) = 480, \qquad \mathtt{NWD}(b, c) = 540, \qquad \mathtt{NWD}(c, a) = 900?$$

Uzasadnić odpowiedź.

Szkic rozwiązania. Z drugiej równości wynika, że $9 \mid b, c$, a z trzeciej, że $9 \mid c, a$. Stąd $9 \mid a, b, c$, więc w szczególności liczba $\mathtt{NWD}(a, b)$ powinna dzielić się przez 9, ale tak nie jest. Wynika z tego, że takie liczby a, b, c nie istnieją.

Zadanie B2 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Dane są liczby dodatnie x, y i z. Wiadomo, że liczby x^2, y^2 i z^2 są długościami boków pewnego trójkąta. Uzasadnić, że x, y i z również są długościami boków trójkąta.

Szkic rozwiązania. Mamy

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 > x^2 + y^2 > z^2,$$

więc $x + y > z$. Dwóch pozostałych nierówności dowodzimy analogicznie.

Zadanie B3 *(autorka: Małgorzata Bednarska-Bzdęga).*
Dwaj gracze zapisują na tablicy na zmianę liczby naturalne, przy czym pierwsza zapisana liczba musi być mniejsza od 2023, a każda następna – mniejsza od poprzedniej. Gra kończy się wygraną tego z graczy, po ruchu którego suma zapisanych liczb będzie równa 2023. Jeśli tak się nie stanie aż do momentu, gdy jeden z graczy zapisze liczbę 0, to gra kończy się remisem. Uzasadnić, że przy bezbłędnej grze obu graczy będzie remis.

Szkic rozwiązania. Pierwszy gracz ma strategię zapewniającą co najmniej remis – może od razu napisać 0. Podobnie drugi gracz może odpowiedzieć zerem na dowolny ruch gracza pierwszego, więc też może zagwarantować sobie remis. Z tego wynika, że bezbłędna gra nie może się skończyć wygraną żadnego z graczy.

Zadanie B4 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ kąty przy wierzchołkach A, C, E są proste. Udowodnić, że każda przekątna tego sześciokąta ma długość nieprzekraczającą połowy obwodu trójkąta BDF.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy przez p połowę obwodu trójkąta DEF. Nierówność $|BD| \leqslant p$ jest równoważna nierówności trójkąta $|BD| \leqslant |DF| + |BF|$; analogicznie dowodzimy nierówności $|DF| \leqslant p$ i $|BF| \leqslant p$.
Niech M i N będą środkami odcinków, odpowiednio, BF i DF. Zachodzą równości

$$|AM| = |FM| = |BM|, \qquad |DN| = |EN| = |FN|,$$

gdyż kąty BAF i DEF są proste. Z tego wynika, że

$$|AE| \leqslant |AM| + |MN| + |NE| = \tfrac{1}{2}|BF| + \tfrac{1}{2}|BD| + \tfrac{1}{2}|DF| = p.$$

Analogicznie dowodzimy, że $|CE| \leqslant p$ i $|AC| \leqslant p$.
Na koniec $|AD| \leqslant |AM| + |MN| + |ND| = p$ i analogicznie $|BE| \leqslant p$ oraz $|CF| \leqslant p$.

Zadanie B5 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Wyznaczyć wszystkie trójki liczb pierwszych $p < q < r$, dla których każda z poniższych liczb jest pierwsza:

$$p + q + r + 1, \qquad pqr + 49, \qquad p^2 + q^2 + r^2 + 23.$$

Szkic rozwiązania. Jeśli $p > 2$, to liczba $p+q+r+1 > 2$ jest parzysta, a więc $p = 2$. Liczby $q + r + 3$, $2qr + 49$ i $q^2 + r^2 + 27$ są zatem pierwsze. Jeśli $q > 3$, to z faktu, że liczba $q + r + 3$ jest pierwsza wynika, że q i r dają taką samą resztę z dzielenia przez 3. Wtedy jednak liczba pq daje resztę 1 z dzielenia przez 3 i w konsekwencji liczba $2qr + 49 > 3$ dzieli się przez 3. Udowodniliśmy, że $q = 3$.
Wobec tego liczby $r+6$, $6r+49$ i r^2+36 są pierwsze. Wnioskujemy stąd, że liczba r nie może dawać z dzielenia przez 5 reszty 4 (bo wtedy $5 \mid r+6$), ani reszty 1 (wtedy $5 \mid 6r + 49$). Jeśli r daję resztę 2 lub 3 z dzielenia przez 5, to r^2 daje resztę 4, więc $5 \mid r^2 + 36$. Pozostała jedynie możliwość $r = 5$.
Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $p = 2$, $q = 3$ i $r = 5$ liczby

$$p + q + r + 1 = 11, \qquad pqr + 49 = 79, \qquad p^2 + q^2 + r^2 + 23 = 61$$

są pierwsze.

Zadanie B6 *(autor: Michał Redmer).*
Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą k, dla której nierówność

$$\frac{a}{c^2a + k} + \frac{b}{a^2b + k} + \frac{c}{b^2c + k} \geqslant 1$$

prawdziwa jest dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, spełniających warunek $abc = 1$.

Szkic rozwiązania. Zauważmy, że jeśli $k > 2$, to dla $a = b = c = 1$ lewa strona nierówności jest równa $\frac{3}{1+k} < 1$. Wykażemy, że dla $k = 2$ nierówność jest prawdziwa. Z warunków $abc = 1$ oraz $a, b, c > 0$ wynika, że istnieją liczby dodatnie x, y, z, które spełniają równości $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$. Przekształćmy tezę równoważnościowo:

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z^2}{x^2}\cdot\frac{x}{y} + 2} + \frac{\frac{y}{z}}{\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y}{z} + 2} + \frac{\frac{z}{x}}{\frac{y^2}{z^2}\cdot\frac{z}{x} + 2} \geqslant 1,$$
$$\frac{x^2}{z^2 + 2xy} + \frac{y^2}{x^2 + 2yz} + \frac{z^2}{y^2 + 2zx} \geqslant 1.$$

Z nierówności $2yz \leqslant y^2 + z^2$ wynika, że $x^2 + 2yz \leqslant x^2 + y^2 + z^2$. Wraz z dwiema nierównościami analogicznymi implikuje to, że lewa strona ostatniej wyśrodkowanej nierówności jest równa co najmniej

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

Zadanie B7 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
W trójkącie ABC punkty M i N są środkami boków odpowiednio BC i AC. Dowieść, że $AM \perp BN$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|AC|^2 + |BC|^2 = 5|AB|^2$.

Szkic rozwiązania. Niech $a = |BC|$, $b = |CA|$ i $c = |AB|$. Długość środkowej boku AB trójkąta ABC wyraża się wzorem

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2},$$

analogicznie jest dla środkowych pozostałych boków. Ponadto środkowe dzielą się w stosunku $2:1$ licząc od wierzchołka, więc jeśli S jest punktem przecięcia AM i BN, to $|AS| = \frac{2}{3}|AM|$ i $|BS| = \frac{2}{3}|BN|$. W takim razie

$$\begin{aligned} AM \perp BM \iff & |\sphericalangle ASB| = 90^\circ \iff |AS|^2 + |BS|^2 = |AB|^2 \\ \iff & \tfrac{4}{9}|AM|^2 + \tfrac{4}{9}|BN|^2 = |AB|^2 \\ \iff & \tfrac{1}{9}(-a^2 + 2b^2 + 2c^2) + \tfrac{1}{9}(2a^2 - b^2 + 2c^2) = c^2 \iff a^2 + b^2 = 5c^2. \end{aligned}$$

Zadanie B8 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Dana jest nieskończona szachownica, na której stoją wilk i zając, zajmując pola mające wspólny bok. Zając porusza się tak jak szachowy skoczek. Wilk porusza się o dokładnie trzy pola w przód, tył, lewo lub prawo. Wilk i zając wykonują ruchy na zmianę, rozpoczyna zając. Jeśli wilk i zając staną na tym samym polu, wilk zje zająca. Rozstrzygnąć, czy zając ma strategię pozwalającą uciec wilkowi na odległość większą niż 2023.
(Każde pole szachownicy jest kwadratem o boku długości 1*. Przez odległość między wilkiem i zającem rozumiemy długość odcinka łączącego środki pól, które zajmują.)*

Szkic rozwiązania. Nazwijmy *ramką* prostokąt złożony z pól szachownicy, w którego przeciwległych polach narożnych znajdują się wilk i zając. Ruch zająca zwiększa obwód ramki maksymalnie o 6. Niech wilk wykonuje skoki wzdłuż nie mniejszego z boków ramki, w stronę zająca. Rozważmy dwie sytuacje po ruchu zająca:
(1) Ramka ma bok o długości co najmniej 4 – wtedy wilk zmniejszy jej obwód o 6.
(2) W przeciwnym razie mamy ramkę $3 \times a$ ($a \leqslant 3$) lub $2 \times b$ ($b \leqslant 2$). W pierwszym przypadku po skoku wilka otrzymamy $1 \times a$ (zmniejszony obwód o 4), a w drugim $2 \times b$ (obwód bez zmian).
Z powyższych rozważań wynika, że obwód ramki nigdy nie przekroczy 18 (ramka o obwodzie większym od 12 ma co najmniej jeden bok długości 4 lub więcej), więc zając nie może uciec na odległość 2023.

Zadanie C1 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
W trójkącie ABC punkty M i N są środkami boków, odpowiednio, BC i CA. Punkt S jest środkiem odcinka MN. Odcinki AS i BN przecinają się w punkcie P. Jaką część pola trójkąta ABC stanowi pole trójkąta NPS?

Szkic rozwiązania. Niech $|AB| = c$ i niech h będzie wysokością opuszczoną z wierzchołka C trójkąta ABC. Przez h_1 i h_2 oznaczmy, odpowiednio, wysokości trójkątów ABP i NPS, opuszczone z wierzchołka P. Ponieważ MN jest odcinkiem środkowym w trójkącie ABC, mamy $MN \parallel AB$ i $|MN| = \frac{1}{2}c$. Stąd $|NS| = \frac{1}{4}c$. Z równości $|\sphericalangle ASN| = |\sphericalangle SAB|$ i $|\sphericalangle BNS| = |\sphericalangle NBA|$ wynika, że trójkąt SNP jest podobny do trójkąta ABP w skali $\frac{1}{4}$. Mamy zatem $h_1 = \frac{1}{4}h_2$, co wraz z równością $\frac{1}{2}h = h_1 + h_2$ daje $h_1 = \frac{1}{10}h$. Możemy zatem obliczyć $[NPS] = \frac{1}{2}|NS|h_1 = \frac{1}{80}ch = \frac{1}{40}[ABC]$.

Zadanie C2 *(autorzy: Małgorzata Bednarska-Bzdęga i Bartłomiej Bzdęga).*
Na szachownicy o wymiarach 8×8 stoi n wież, n gońców i n skoczków, przy czym żadna z tych figur nie atakuje żadnej z $3n - 1$ pozostałych. Wyznaczyć największą możliwą wartość n.

Szkic rozwiązania. Jest oczywiste, że $n \leqslant 8$. Wieże zabierają n kolumn i n wierszy, więc liczba pozostałych pól jest równa $(8-n)^2$. Jeśli $n \geqslant 5$, to

$$(8-n)^2 \leqslant 9 < 10 \leqslant 2n,$$

więc ustawienie jest niemożliwe. Dla $n = 4$ ustawienie jest możliwe. Można na przykład ustawić skoczki na polach $A4$, $B4$, $C4$, $D4$, gońce na polach $A8$, $B8$, $C8$, $D8$, a wieże na polach $E1$, $F2$, $G6$, $H7$.

Zadanie C3 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Liczby rzeczywiste x, y spełniają warunek $x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4} = x + y$. Udowodnić, że liczby x i y są nieujemne.

Szkic rozwiązania. Zauważmy, że

$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x^2 + y^2 + \tfrac{1}{4} + xy - \tfrac{1}{2}x - y = \tfrac{3}{4}x^2 + \left(\tfrac{1}{2}x + y - \tfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0,$$

więc $x \geqslant 0$ i analogicznie $y \geqslant 0$.

Zadanie C4 *(autor: Wojciech Wawrów).*
Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$ oraz liczby całkowite a, b, c, d. Udowodnić, że jeśli

$$ab, \qquad cd, \qquad ac + bd$$

są liczbami podzielnymi przez n, to liczby ac i bd również dzielą się przez n.

Szkic rozwiązania. Wykażemy następujący
Lemat. Niech x, y, n będą całkowite i niech $n \neq 0$. Wówczas jeśli $n \mid x + y$ i $n^2 \mid xy$, to $n \mid x, y$.
Dowód lematu. Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Przez t, u, v oznaczmy największe liczby naturalne, dla których $p^t \mid n$, $p^u \mid x$, $p^v \mid y$. Z podzielności $n^2 \mid xy$ otrzymujemy $2t \leqslant u + v$, więc $t \leqslant u$ lub $t \leqslant v$. Jeśli zachodzi pierwsza z tych nierówności, to $p^t \mid x$; jeśli druga, to $p^t \mid y$. W obu przypadkach prowadzi to do wniosku

$p^t \mid x, y$, gdyż $p^t \mid x+y$. Wobec dowolności p otrzymujemy $n \mid x, y$.
Wróćmy do rozwiązania zadania. Podstawiając $x = ac$ i $y = bd$, otrzymujemy z założeń $n \mid x+y$ oraz $n^2 \mid abcd = (ac)(bd) = xy$. Na mocy lematu $n \mid x, y$, więc $n \mid ac, bd$.

Zadanie C5 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Ali i Baba znaleźli $2n$ pereł, każda o innej wartości należącej do zbioru

$$\{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{2n-1}\}.$$

Umówili się na następujący podział znaleziska. Najpierw Ali nawinie perły na nić w dowolnej kolejności, robiąc z nich naszyjnik. Następnie Baba przetnie naszyjnik w dwóch miejscach, na dwa sznury po n pereł. Na końcu Ali wybierze dla siebie jeden z tych dwóch sznurów, a drugi sznur weźmie Baba. W zależności od liczby naturalnej $n \geqslant 1$ wyznaczyć największą liczbę m o następującej własności: Ali może sobie zagwarantować sznur pereł o wartości co najmniej m, niezależnie od tego, co zrobi Baba.

Szkic rozwiązania. Rozwiązanie opiera się na następującym fakcie:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1 < 2^k.$$

Z tej nierówności wynika, że każda perła jest droższa od wszystkich tańszych od niej razem wziętych. Załóżmy, że Ali i Baba grają optymalnie. W takim razie:
(1) Ali, niezależnie od cięcia Baby, wybierze sznur z perłą o wartości 2^{2n-1};
(2) Baba, rozcinając naszyjnik, rozdzieli perły o wartości 2^{2n-1} i 2^{2n-2}.
Z powyższego wynika, że Ali nie może zyskać więcej niż

$$2^{2n-1} + 2^{2n-3} + 2^{2n-4} + \ldots + 2^n = 2^{n-1}(3 \cdot 2^{n-1} - 1).$$

Z drugiej strony, taką sumę gwarantuje mu następujący naszyjnik:

$$1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}, 2^{2n-2} \;\Big|\; 2^{2n-1}, 2^{2n-3}, 2^{2n-4}, \ldots, 2^n.$$

Baba ma tylko jedno cięcie, którym rozdziela dwie najcenniejsze perły (zaznaczone pionową kreską) i prowadzi ono do wyżej opisanego zysku Alego.

Zadanie C6 *(autor: Michał Redmer).*
Odcinki AD, BE i CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC i przecinają się w punkcie H. Punkty K, L, M leżą, odpowiednio, na odcinkach BC, CA, AB oraz

$$HK \perp EF, \qquad HL \perp FD, \qquad HM \perp DE.$$

Udowodnić, że odcinki AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie.

Szkic rozwiązania. Niech α, β, γ będą kątami trójkąta ABC przy wierzchołkach, odpowiednio, A, B, C. Przedłużmy odcinek MH do przecięcia DE (pod kątem prostym) w punkcie P. Z równości kątów $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle AEB|$ wynika, że na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}|\sphericalangle AHM| &= |\sphericalangle PHD| = 90^\circ - |\sphericalangle PDH| = 90^\circ - |\sphericalangle ADE| \\ &= 90^\circ - |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle BAE| = \alpha.\end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy, że $|\sphericalangle BHM| = \beta$. Wynika z tego, że

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{\frac{1}{2}|AM| \cdot |FH|}{\frac{1}{2}|BM| \cdot |FH|} = \frac{[AMH]}{[BMH]} = \frac{\frac{1}{2}|AH| \cdot |MH| \sin\alpha}{\frac{1}{2}|BH| \cdot |MH| \sin\beta} = \frac{|AH| \sin\alpha}{|BH| \sin\beta}.$$

Analogicznie obliczamy $\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|BH| \sin\beta}{|CH| \sin\gamma}$ i $\frac{|CL|}{|CL|} = \frac{|CH| \sin\gamma}{|AH| \sin\alpha}$. Teza wynika natychmiast z twierdzenia Cevy.

Zadanie C7 *(autor: Patryk Zubilewicz).*
Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają równanie

$$f(x - f(y)) = f(y) + f(x + y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Szkic rozwiązania. Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcje $f(x) = 0$ i $f(x) = -2x$ spełniają dane równanie. Wykażemy, że nie ma innych.
Niech $c = f(0)$. Podstawiając $x = c$ i $y = 0$, otrzymamy $f(c - f(0)) = f(0) + f(c)$, więc $f(c) = 0$. Dla $x = y = 0$ mamy $f(0 - f(0)) = f(0) + f(0)$, a zatem $f(-c) = 2c$. Wreszcie dla $x = c$ i $y = -c$ otrzymujemy $f(c - f(-c)) = f(-c) + f(c - c)$, co daje $2c = 3c$, czyli $f(0) = c = 0$. Teraz rozważymy dwa przypadki:
(1) Jedynym miejscem zerowym funkcji f jest 0. Podstawiając $x = y + f(y)$, otrzymamy $f(y) = f(y) + f(2y + f(y))$, więc $f(2y + f(y)) = 0$. Z jedyności miejsca zerowego funkcji f mamy $f(y) = -2y$.
(2) Funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe $t \neq 0$. Dla $y = t$ otrzymujemy $f(x - f(t)) = f(t) + f(x + t)$, czyli $f(x) = f(x + t)$. Funkcja f jest zatem okresowa, a więc jest ograniczona jako funkcja ciągła. Podstawiając $x = 0$, otrzymamy równanie $f(0 - f(y)) = f(y) + f(0 + y)$, czyli $f(-f(y)) = 2f(y)$. Oznacza to, że jeśli y_0 jest wartością funkcji f, to $2y_0$ również – indukcyjnie $2^n y_0$ jest wartością funkcji f. Wobec ograniczoności f, jedyną jej wartością jest 0, a więc $f(x) = 0$.

Zadanie C8 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Wyznaczyć największą liczbę naturalną n o następującej własności:

istnieją takie liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$,
że dla każdej pary różnych liczb $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$
zachodzi równość $\mathtt{NWD}(a_i, a_j) = |a_i - a_j|$,

lub udowodnić, że największa taka liczba n nie istnieje.

Szkic rozwiązania. Udowodnimy indukcyjnie, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ takie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ istnieją. Dla $n = 2$ wystarczy wziąć $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$. Ustalmy $n \geqslant 2$ i załóżmy indukcyjnie, że $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ spełniają powyższe warunki. Niech

$$a_0 = 0, \qquad A = a_1 a_2 \ldots a_n, \qquad b_i = A + a_i \text{ dla } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Wtedy $b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Niech $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Na mocy algorytmu Euklidesa i założenia indukcyjnego

$$\begin{aligned} \mathtt{NWD}(b_j, b_i) &= \mathtt{NWD}(A + a_j, A + a_i) = \mathtt{NWD}(a_j - a_i, A + a_i) \\ &= \mathtt{NWD}(\mathtt{NWD}(a_j, a_i), A + a_i) = \mathtt{NWD}(a_j, a_i) \\ &= a_j - a_i = (A + a_j) - (A + a_i) = b_j - b_i, \end{aligned}$$

co kończy krok indukcyjny.

Autor sprawozdania: dr Bartłomiej Bzdęga;
recenzentka: Małgorzata Bednarska-Bzdęga.