ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

XV Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2024 r.

Organizacja konkursu

Piętnasta edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2023/2024. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Organizację WLM wspiera Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zainteresowanymi. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlm.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLM na Facebooku. Uczniowie uczestniczyli w konkursie w trzech następujących kategoriach:

- Junior (9 uczestników) – uczniowie klas 7 i 8 szkół podstawowych;
- Senior (32 uczestników) – uczniowie klas 1 i 2 szkół średnich;
- Weteran (13 uczestników) – uczniowie klas 3, 4 i 5 szkół średnich.

Uczestnicy rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia, zestaw B do końca lutego, zestaw C do końca marca. Każdy z zestawów liczył po 8 zadań z różnych działów matematyki, przy czym juniorzy rozwiązywali zadania 1–4, seniorzy 3–6, a weterani 5–8. Rozwiązania oceniane były przez Komisję WLM. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Komisja WLM

- Przewodniczący: dr Bartłomiej Bzdęga;
  wiceprzewodniczący: dr Jędrzej Garnek.
- Zespół oceniający prace uczestników:
  dr hab. Małgorzata Bednarska-Bzdęga, Kacper Bem, dr Jędrzej Garnek, Patryk Matusiak, dr Piotr Mizerka, mgr inż. Sylwester Swat.
- Zespół przygotowujący zestawy zadań:
  dr Bartłomiej Bzdęga, Michał Redmer, Patryk Zubilewicz.

Wyniki konkursu – Juniorzy

Nagrody I stopnia

Paulina Berlińska (119)
Uczennica 7 klasy Szkoły Podstawowej nr 38 w Poznaniu.

Nagrody II stopnia

Julian Kuryłłowicz-Kaźmierczak (102)
Uczeń 6 klasy szkoły podstawowej.

Aleksander Dembny (101)
Uczeń 7 klasy Szkoły Podstawowej nr 89 im. Krzysztofa Kamila Baczyńskiego w Poznaniu.

Wyróżnienie

Maksymilian Śliwiński (49)
Uczeń 7 klasy szkoły podstawowej.

Wyniki konkursu – Seniorzy

Nagrody I stopnia

Aleksandra Żyniewicz (119)
Uczennica 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Szymon Anders (116)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Michał Wojkiewicz (115)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody II stopnia

Adam Wiatr (106)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Piotr Przysuszyński (92)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Aryna Shramianok (91)
Uczennica 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyróżnienie

Igor Kuzemko (80)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyniki konkursu – Weterani

Nagroda I stopnia

Karol Musieliński (108)
Uczeń 4 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagroda III stopnia

Tymoteusz Bultrowicz (61)
Uczeń 4 klasy XXXVIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyróżnienia

Maciej Grajdek (41)
Uczeń 3 klasy III Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Zuzanna Osses (39)
Uczennica 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Zadania i szkice rozwiązań

Zadanie A1 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Liczby nieujemne x, y i z spełniają nierówności:

$$2 \leqslant x + y \leqslant 3, \qquad 4 \leqslant y + z \leqslant 5.$$

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość $z + x$.

Szkic rozwiązania. Zachodzą nierówności

$$1 \leqslant 4 - x - y \leqslant 4 - y \leqslant z \leqslant x + z \leqslant x + z + 2y = 8.$$

Wartość 1 jest osiągalna dla trójki $x = 0$, $y = 3$, $z = 1$, a wartość 8 dla $x = 3$, $y = 0$, $z = 5$.

Zadanie A2 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Punkt P leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ i spełnia równości:

$$|DP| = |AB|, \qquad |CP| = |BC|.$$

Udowodnić, że $|\sphericalangle ABP| < 22.5^\circ$.

Szkic rozwiązania. Niech $|\sphericalangle CDP| = \varphi < 90^\circ$. Obliczamy kolejno

$$|\sphericalangle DCP| = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi, \qquad |\sphericalangle BCP| = \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Analogicznie $|\sphericalangle ABP| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BCP| = \frac{1}{4}\varphi < 22.5^\circ$.

Zadanie A3 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Każdą liczbę całkowitą pomalowano na pewien kolor. Wiadomo, że dla każdej pary a, b liczb całkowitych liczby $a + b$ i $a - b$ mają ten sam kolor. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, które wykorzystano?

Szkic rozwiązania. Jeśli x i y są tej samej parzystości, to dla

$$a = (x + y)/2, \qquad b = (x - y)/2$$

mamy $x = a + b$ i $y = a - b$. Z tego wynika, że można użyć najwyżej dwóch kolorów. Kolorowanie za pomocą dwóch jest możliwe: jednym liczby parzyste, drugim nieparzyste.

Zadanie A4 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Wyznaczyć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych dodatnich, spełniających równość

$$2\mathtt{NWW}(a,b)+3\mathtt{NWD}(a,b)=4a+b+6.$$

Szkic rozwiązania. Niech $d=\mathtt{NWD}(a,b)$ oraz $a=dA$, $b=dB$. Wówczas mamy $\mathtt{NWW}(a,b)=dAB$. Po podstawieniu do danej równości otrzymujemy

$$2dAB+3d=4dA+dB+6,$$

równoważnie

$$(2A-1)(B-2)=\frac{6}{d}-1\in\{0,1,2,5\}.$$

Rozważamy każdą możliwość z osobna:

(1) $(2A-1)(B-2)=0$. Wtedy $d=6$ i $B=2$, więc $b=12$. Liczby A i B muszą być względnie pierwsze, więc $A=2n-1$ dla pewnego całkowitego dodatniego n. Otrzymujemy $(a,b)=(12n-6,12)$.

(2) $(2A-1)(B-2)=1$. Tutaj $d=3$ oraz $A=1$, $B=3$, więc $(a,b)=(3,9)$.

(3) $(2A-1)(B-2)=2$. Wówczas $d=2$ oraz $A=1$, $B=4$, więc $(a,b)=(2,8)$.

(4) $(2A-1)(B-2)=5$. W tym przypadku $d=1$ oraz $A=1$, $B=7$ albo $A=3$, $B=3$ (ale wtedy $\mathtt{NWD}(A,B)>1$). Stąd $(a,b)=(1,7)$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie otrzymane pary spełniają początkowe założenia.

Zadanie A5 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest rosnąca. Dowieść, że jeśli $x\in(a,b)$, to

$$ab+x^2+f(a)f(b)+f(x)^2<x(a+b)+f(x)\big(f(a)+f(b)\big).$$

Szkic rozwiązania. Teza jest równoważna nierówności

$$0<(b-x)(x-a)+\big(f(b)-f(x)\big)\big(f(x)-f(a)\big),$$

która jest prawdziwa, bo $a<x<b$ i $f(a)<f(x)<f(b)$.

Zadanie A6 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg, przy czym $|AB| = |BD|$ i $|CD| = |DE|$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie X, odcinki AC i BD w punkcie Y, a półproste $AC^{\rightarrow}$ i $ED^{\rightarrow}$ w punkcie Z. Udowodnić, że prosta XZ przechodzi przez środek odcinka DY.

Szkic rozwiązania. Punkt X leży na przecięciu się dwusiecznych kątów AEZ i EAZ, więc prosta ZX jest dwusieczną kąta AZE. Przyjmijmy, że kąty wpisane oparte na łukach DE i AB (oraz łukach przystających) mają miary, odpowiednio, α i β. Wówczas $|\sphericalangle ZYD| = \alpha + \beta$ (kąt zewnętrzny trójkąta ADY). Ponadto

$$|\sphericalangle YDZ| = |\sphericalangle ADZ| - \beta = \alpha + 2\beta - \beta = \alpha + \beta$$

(kąt ADZ jest zewnętrzny w trójkącie AED). Trójkąt YDZ jest równoramienny, więc dwusieczna kąta YZD przecina podstawę DY w połowie.

Zadanie A7 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Na płaszczyźnie leży pewna (skończona) liczba okręgów, przy czym żadne dwa z nich nie są styczne i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Każdy punkt, który należy do pewnego okręgu i leży we wnętrzu nieparzystej liczby okręgów, pomalowano na zielono. Wszystkie punkty przecięcia się okręgów również są zielone. Dowieść, że zbiór zielonych punktów można podzielić na parami rozłączne krzywe zamknięte bez samoprzecięć.

Szkic rozwiązania. Niech punkty przecięcia się okręgów będą wierzchołkami grafu, a zielone łuki – jego krawędziami. Otrzymany graf ma każdy wierzchołek stopnia 2, więc jest sumą parami rozłącznych (wierzchołkowo i krawędziowo) cykli.

Zadanie A8 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p o następującej własności:
Dla każdego $r \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ istnieją takie liczby całkowite a i b niepodzielne przez p, że liczba $a^2 + b^2$ daje resztę r z dzielenia przez p.

Szkic rozwiązania. Nietrudno sprawdzić, że liczby 2, 3 i 5 nie spełniają postawionego warunku. Dalej będziemy zakładać, że $p \geqslant 7$.

Rozważmy dowolną resztę kwadratową r modulo p. Niech x będzie odwrotnością 5 modulo p. Wówczas dla pewnego całkowitego c, niepodzielnego przez p, mamy

$$r \equiv c^2 \equiv (5xc)^2 = (3cx)^2 + (4cx)^2 \pmod{p}.$$

Kolej na reszty niekwadratowe – niech s będzie dowolną spośród nich. Przez K oznaczmy zbiór wszystkich reszt kwadratowych wraz z zerem; $|K| = (p+1)/2$. Zbiory K i $\{s - l : l \in K\}$ mają łącznie $p+1$ elementów, więc istnieją takie $k, l \in K$, że $k \equiv s - l \pmod{p}$. Równoważnie $s \equiv k + l \equiv a^2 + b^2 \pmod{p}$ dla pewnych całkowitych a, b. Ponadto $p \nmid a, b$, bo inaczej s byłoby resztą kwadratową.

Zadanie B1 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Wybrano dwie liczby naturalne dwucyfrowe, mniejsze od 50. Na tablicy napisano, jedno za drugim: iloczyn tych liczb, ich sumę oraz 01. W ten sposób powstała jedna liczba naturalna (na przykład dla liczb 34 i 27 mamy $34 \cdot 27 = 918$ i $34 + 27 = 61$, więc otrzymamy liczbę 9186101). Uzasadnić, że powstała liczba jest zawsze złożona.

Szkic rozwiązania. Niech a i b będą wybranymi liczbami. Liczba $a+b$ jest dwucyfrowa, więc liczba zapisana na tablicy jest równa

$$1 + 100(a + b) + 10000ab = (1 + 100a)(1 + 100b).$$

Oba czynniki są naturalne i większe od 1, więc jest to liczba złożona.

Zadanie B2 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wiadomo, że liczby $\sqrt{n}$ i $\sqrt{n+1}$ mają taką samą pierwszą i drugą cyfrę po przecinku w zapisie dziesiętnym. Udowodnić, że $n > 2024$.

Szkic rozwiązania. Zauważmy najpierw, że

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2},$$

więc $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{100}$ na mocy treści zadania. Wobec tego

$$\frac{1}{100} > \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}},$$

zatem $n > (100/2)^2 - 1 = 2499 > 2024$.

Zadanie B3 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Pięciokąt wypukły $ABCDE$ i punkt P leżący na odcinku CD spełniają warunki:

$$BC \parallel AP \parallel DE, \qquad CD \parallel BE, \qquad AE \parallel BP.$$

Dowieść, że pole czworokąta $APDE$ i pole trójkąta ACE są równe.

Szkic rozwiązania. Niech Q będzie punktem przecięcia AP i BE. Wówczas

$$[APDE] - [AQE] = [DEQP].$$

Zauważmy, że zachodzą następujące równości:

$$[EQC] = [EQP] = [AQB] = [AQC].$$

Wynikają one, odpowiednio, z równoległości $PC \parallel EQ$, $BP \parallel AE$, $BC \parallel AQ$. Stąd

$$[ACE] - [AQE] = [AQC] + [EQC] = 2[EQP] = [DEQP],$$

gdyż czworokąt $DEQP$ jest równloegłobokiem.

Zadanie B4 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Na morzu leży 10 wysp, pomiędzy każdymi dwiema z nich jest dwukierunkowe połączenie lotnicze w cenie będącej liczbą naturalną od 1 do 9 koron. Zachowane są przy tym następujące reguły:

- cena przelotu z wyspy A na wyspę B jest zawsze taka sama, jak cena przelotu z wyspy B na wyspę A;
- dla każdych trzech różnych wysp A, B, C ceny wszystkich następujących przelotów: z A na B, z B na C oraz z C na A są różne.

Turysta zamierza odwiedzić każdą z tych wysp dokładnie raz, przy czym może on zacząć podróż na dowolnej wyspie i skończyć na dowolnej innej. Udowodnić, że może on tak zorganizować podróż, by zapłacić za przeloty łącznie nie więcej niż 15 koron.

Szkic rozwiązania. Rozważmy graf, w którym wierzchołkami są wyspy, krawędziami – połączenia, a wagami krawędzi – ceny połączeń.

Postawione warunki są równoważne temu, że dla $w = 1, 2, \ldots, 9$ krawędzie z wagą w tworzą skojarzenie pełne. Pokolorujmy na czerwono krawędzie z wagami 1 i 2. Tworzą one podgraf 2-regularny, więc jest on sumą rozłącznych cykli. Te cykle mają parzystą długość, bo krawędzie z wagami 1 i 2 występują w nich naprzemiennie. Są tu dwie możliwości.

(1) Czerwone krawędzie tworzą cykl Hamiltona. Wtedy usuwamy z niego dowolną krawędź z wagą 2 i otrzymujemy ścieżkę Hamiltona o łącznej wadze 13.

(2) Mamy dwa czerwone cykle – nazwijmy je: $(ABCD)$ o długości 4 i $(EFGHIJ)$ o długości 6. Powiedzmy, że krawędzie CD i EF mają wagę 1. Wtedy DA i JE mają wagę 2. Z wierzchołka D wychodzą krawędzie z wagami 3 i 4; co najwyżej jedna z nich jest krawędzią BD, więc wierzchołek D jest połączony z cyklem $(EFGHIJ)$ krawędzią o wadze 3 lub 4. Bez straty ogólności niech będzie to krawędź DE. Wtedy ścieżka $ABCDEFGHIJ$ ma wagę najwyżej 15.

Zadanie B5 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Liczby a i b są całkowite dodatnie. Wykazać, że liczba $14^a + 15^b$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Szkic rozwiązania. Rozważmy równanie $n^2 = 14^a + 15^b$. Mamy $n^2 \equiv (-1)^a \pmod 3$, więc $a = 2k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}_+$. W szczególności $a \geqslant 2$, więc $n^2 \equiv (-1)^b \pmod 4$, zatem $b = 2l$ dla pewnego $l \in \mathbb{Z}_+$. Z równości

$$15^b = n^2 - 14^{2k} = (n + 14^k)(n - 14^k)$$

otrzymujemy

$$n + 14^k = 3^{b_1} 5^{b_2}, \qquad n - 14^k = 3^{b_1'} 5^{b_2'}; \qquad b_1 + b_1' = b_2 + b_2' = b.$$

Po odjęciu stronami dostaniemy

$$2 \cdot 14^k = 3^{b_1} 5^{b_2} - 3^{b_1'} 5^{b_2'}.$$

Lewa strona nie dzieli się przez 3 i przez 5, więc $2 \cdot 14^k$ jest jedną z liczb:

$$1 - 15^b, \qquad 3^b - 5^b, \qquad 5^b - 3^b, \qquad 15^b - 1.$$

Pierwsze dwie są ujemne. Pozostałe rozważymy osobno.

(1) $2 \cdot 14^k = 5^b - 3^b = (5^l + 3^l)(5^l - 3^l)$, więc

$$5^l + 3^l = 2^{k_1} 7^{k_2}, \qquad 5^l - 3^l = 2^{k_1'} 7^{k_2'}; \qquad k_1 + k_1' = k + 1, \quad k_2 + k_2' = k.$$

Po dodaniu i odjęciu stronami:

$$2 \cdot 5^l = 2^{k_1} 7^{k_2} + 2^{k_1'} 7^{k_2'}, \qquad 2 \cdot 3^l = 2^{k_1} 7^{k_2} - 2^{k_1'} 7^{k_2'}.$$

Lewe strony obu równości nie dzielą się przez 7, więc $k_2 = 0$ albo $k_2' = 0$. Ponadto lewe strony mają 2 w wykładniku 1, więc $k_1 = 1$ lub $k_1' = 1$. Liczba $2 \cdot 3^l$ jest więc równa jednej z liczb:

$$2 - 14^k, \qquad 2^k - 2 \cdot 7^k, \qquad 2 \cdot 7^k - 2^k, \qquad 14^k - 2.$$

Pierwsze dwie są ujemne. W trzecim przypadku otrzymujemy $0 \equiv 2 \cdot 5^l = 2 \cdot 7^k + 2^k \equiv 2^{k+1} + 2^k = 3 \cdot 2^k \not\equiv 0 \pmod 5$, a w czwartym $0 \equiv 2 \cdot 5^l = 14^k + 2 \equiv (-1)^k + 2 \not\equiv 0 \pmod 5$ – sprzeczność.

(2) $2 \cdot 14^k = 15^b - 1 = (15^l - 1)(15^l + 1)$. Rozumując analogicznie jak poprzednio, otrzymamy

$$2 \cdot 15^l = 2^{k_1} 7^{k_2} + 2^{k_1'} 7^{k_2'}, \qquad 2 = 2^{k_1} 7^{k_2} - 2^{k_1'} 7^{k_2'},$$

przy czym $k_2 = 0$ albo $k_2' = 0$ oraz $k_1 = 1$ lub $k_1' = 1$. Stąd 2 powinna być równa jednej z liczb:

$$2 - 14^k, \qquad 2^k - 2 \cdot 7^k, \qquad 2 \cdot 7^k - 2^k, \qquad 14^k - 2,$$

ale pierwsze dwie są ujemne, a pozostałe są większe od 2 – sprzeczność.

Zadanie B6 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Wyznaczyć najmniejszą stałą c o następującej własności: dla każdego całkowitego dodatniego n w sumie

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}$$

można zmienić część znaków $+$ na $-$ w taki sposób, by otrzymać wyrażenie o wartości bezwzględnej nieprzekraczającej $\frac{c}{n^2}$; lub udowodnić, że taka stała nie istnieje.

Szkic rozwiązania. Szukaną stałą jest $c=\frac{35}{12}$.
Niech S_n będzie najmniejszą możliwą wartością bezwzględną utworzonego wyrażenia. Łatwo się przekonać, że

$$S_5=\left|1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}\right|=\frac{7}{60}=\frac{35/12}{5^2},$$
$$S_6\leqslant\left|1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}\right|=\frac{1}{20}<\frac{2}{6^2}.$$

Równie łatwo sprawdzić, że dla $n\leqslant 4$ zachodzi nierówność $S_n\leqslant\frac{2}{n^2}$. Wykażemy indukcyjnie, że dla $n\geqslant 7$ zachodzi nierówność $S_n<\frac{1.3}{n^2}$.
Warunkami początkowymi są:

$$S_7\leqslant\left|1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}\right|=\frac{11}{420}<\frac{1.3}{7^2},$$
$$S_8\leqslant\left|1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}\right|=\frac{13}{840}<\frac{1.3}{8^2}.$$

Krok indukcyjny (dla $n\geqslant 7$) przebiega następująco. Oznaczmy

$$A_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Wówczas, w zależności od tego czy $S_n\leqslant A_n$, czy na odwrót, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(n+2)^2S_{n+2}&\leqslant(n+2)^2|S_n-A_n|\\&=\begin{cases}(n+2)^2(A_n-S_n) & \leqslant(n+2)^2A_n=\frac{n+2}{n+1}\\(n+2)^2(S_n-A_n) & \leqslant(n+2)^2\left(\frac{1.3}{n^2}-A_n\right)<1.3\left(1+\frac{2}{n}\right)^2-1\end{cases}\\&<1.3.\end{aligned}$$

Zadanie B7 *(autor: Michał Redmer).*
Odcinek AD jest średnicą okręgu ω opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC, w którym $|AB| < |AC|$. Punkt K leży na odcinku AC i spełnia równość $|BK| = |CK|$. Proste AC i BD przecinają się w punkcie L. Okrąg opisany na trójkącie BKL przecina okrąg ω w punktach B i M. Dowieść, że styczne do okręgu ω w punktach D i M przecinają się na prostej BC.

Szkic rozwiązania. Niech S będzie biegunem prostej BC względem okręgu ω. Ponieważ $SK \perp BC$, mamy

$$|\sphericalangle SKL| = 90^\circ - |\sphericalangle ACB| = 90^\circ - |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle SBL|,$$

przy czym ostatnia równość wynika z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą. Punkty B, K, M, S, L leżą zatem na jednym okręgu. Wobec tego

$$|\sphericalangle BMS| = |\sphericalangle BKS| = |\sphericalangle SKL| = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BMD|.$$

Wynika stąd, że punkty M, D, S są współliniowe. Z prawa wzajemności biegunowej dla okręgu ω, biegun prostej MD leży na biegunowej punktu S, czyli na prostej BC.

Zadanie B8 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
W przestrzeni danych jest $n \geqslant 2024$ zielonych prostych oraz punkt P, który jest oddalony od każdej z tych prostych o nie więcej niż 1. Dowieść, że odległość pomiędzy pewnymi dwiema zielonymi prostymi jest mniejsza niż $\frac{3}{\sqrt{n}}$.

Szkic rozwiązania. Niech $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ będą zielonymi prostymi. Oznaczmy najmniejszą z odległości pomiędzy ℓ_i i ℓ_j dla $i \neq j$ przez $d = 2r$. Niech s będzie sferą o środku P i promieniu $R = 1 + r$ oraz niech W_i będzie nieskończonym walcem bez brzegu, o promieniu r i osi ℓ_i, dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Walce $W_1, W_2, \ldots, W_n$ są parami rozłączne, więc ich wspólne części ze sferą s również mają tę własność.
Niech d_i oznacza odległość prostej ℓ_i od punktu P dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Ponieważ $d_i + r \leqslant 1 + r = R$, część wspólną $s \cap W_i$ stanowią dwa rozłączne obszary, każdy o polu większym niż πr^2. Łącznie jest $2n$ parami rozłącznych takich obszarów na sferze s. Wynika z tego, że

$$2n \cdot \pi r^2 < 4\pi R^2 = 4\pi(1 + r)^2.$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$d = 2r < \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{n} - \sqrt{2}} < \frac{3}{\sqrt{n}},$$

gdyż dla $n \geqslant 2024$ zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt{n} - \sqrt{2}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n/2}} \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{1012}} > \frac{29}{30} = \frac{2.9}{3} > \frac{\sqrt{8}}{3}.$$

Zadanie C1 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Dana jest szachownica o wymiarach 12×12, każde jej pole jest kwadratem o boku 1. Pola są pomalowane na czarno i biało w sposób tradycyjny – każde dwa pola mające wspólny bok są różnych kolorów. Tę szachownicę rozcięto na trapezy prostokątne o wysokości 1 oraz podstawach 2 i 1. Skutkiem tego niektóre z pól zostały rozcięte wzdłuż przekątnej. Uzasadnić, że liczba rozciętych białych pól i liczba rozciętych czarnych pól są równe.

Szkic rozwiązania. Jeśli x jest liczbą trapezów zajmujących całe pole czarne i pół białego, a y – na odwrót, to liczba przeciętych białych pól jest równa $x/2$, a liczba przeciętych czarnych – $y/2$. Liczba pól białych jest taka sama, jak liczba pól czarnych, więc $x + \frac{1}{2}y = y + \frac{1}{2}x$, co daje $x = y$.

Zadanie C2 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Czy istnieją takie liczby pierwsze p, q, r (niekoniecznie różne), że liczby

$$pq + 1, \qquad qr + 1, \qquad rp + 1$$

są kwadratami liczb naturalnych? Uzasadnić odpowiedź.

Szkic rozwiązania. Bez utraty ogólności niech $p \leqslant q \leqslant r$. Zapiszmy

$$qr + 1 = a^2, \qquad rp + 1 = b^2, \qquad pq + 1 = c^2.$$

Równoważnie:

$$qr = (a-1)(a+1), \qquad rp = (b-1)(b+1), \qquad pq = (c-1)(c+1).$$

Stąd, ponieważ $a, b, c \geqslant 3$, na mocy jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze,

$$p = c - 1 = b - 1, \qquad q = a - 1 = c + 1, \qquad r = a + 1 = c + 1.$$

Z pierwszej i trzeciej równości otrzymujemy $a = b = c$, ale jest to sprzeczne z drugą równością. Takie liczby p, q, r nie istnieją.

Zadanie C3 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Liczby rzeczywiste x i y spełniają następującą równość:

$$6(x^2 + y^2) = 5(x + y) + 4xy - 3.$$

Udowodnić, że $x \geqslant \frac{1}{2}$ lub $y \geqslant \frac{1}{2}$.

Szkic rozwiązania. Zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned} x + y &= 6(x^2 + y^2) - 4(x + y) - 4xy + 3 \\ &= 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 + 2(x^2 - 2xy + y^2) + 1 \\ &= (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + 2(x-y)^2 + 1. \end{aligned}$$

Wynika z nich, że $x + y \geqslant 1$, czyli $x \geqslant \frac{1}{2}$ lub $y \geqslant \frac{1}{2}$.

Zadanie C4 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Półproste $AB^{\to}$ i $DC^{\to}$ przecinają się w punkcie P, a półproste $BC^{\to}$ i $AD^{\to}$ w punkcie Q. Punkty K, L, M, N leżą, odpowiednio, na odcinkach AP, DP, BQ, AQ i spełniają równości:

$$|PK| = |AB|, \qquad |PL| = |CD|, \qquad |QM| = |BC|, \quad |QN| = |AD|.$$

Udowodnić, że $|KN| = |LM|$.

Szkic rozwiązania. Rozważmy taki punkt E, żeby czworokąt $BCDE$ był równoległobokiem. Wtedy $\triangle ABE \equiv \triangle KPL$ (bkb), z czego wynika, że $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{KL}$. Analogicznie dowodzimy, że $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{NM}$. Odcinek LM jest zatem obrazem odcinka KN w translacji o wektor $\overrightarrow{AE}$, więc $|KN| = |LM|$.

Zadanie C5 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
Niech $n \geqslant 5$ będzie liczbą naturalną. Na zielono pokolorowano k spośród przekątnych n-kąta foremnego. W zależności od n wyznaczyć największą możliwą wartość k, jeśli:

(a) każde dwie zielone przekątne się przecinają;

(b) każde dwie zielone przekątne mają punkt wspólny.

(Uwaga. Koniec przekątnej należy do niej, więc może być punktem wspólnym dwóch przekątnych. Przekątne przecinające się to takie, które mają punkt wspólny różny od ich końców.)

Szkic rozwiązania. Niech $A_1A_2\ldots A_n$ będzie n-kątem foremnym.

(a) $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Więcej nie może być, bo każda przekątna ma dwa inne końce. Konstrukcja: A_iA_{i+k} dla $i = 1, 2, \ldots, k$.

(b) $k = n$. Więcej nie może być, bo każda z przekątnych n-kąta foremnego jest równoległa do jednej z prostych: $A_1A_2, A_1A_3, \ldots, A_1A_n$ lub A_nA_2, zatem wśród więcej niż n przekątnych znalazłyby się pewne dwie równoległe. Konstrukcja: A_1A_k dla $k = 3, 4, \ldots, n-1$ oraz A_nA_2, A_nA_3, $A_{n-1}A_2$.

Zadanie C6 *(autor: Patryk Zubilewicz).*
Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć wszystkie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ liczb całkowitych dodatnich, które spełniają następujące dwa równania:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = n, \qquad 1a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = n^2.$$

Szkic rozwiązania. Dla $n = 1$ mamy jedno rozwiązanie: $(a) = (1)$. Dalej zakładamy, że $n > 1$.

Niech $m_1, m_2, \ldots, m_k$ będą indeksami, niekoniecznie kolejnymi, dla których $a_{m_i} > 1$ (pozostałe a_j są równe 1). Oznaczmy $b_i = a_{m_i}$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Równości z zadania są równoważne równościom

$$b_1 b_2 \ldots b_k = n, \qquad m_1(b_1 - 1) + m_2(b_2 - 1) + \ldots + m_k(b_k - 1) = \tfrac{1}{2}n(n-1), \quad (1)$$

przy czym $b_1, b_2, \ldots, b_k \geqslant 2$. Rozważmy najpierw przypadek $k = 1$ – wówczas $b_1 = n$ i $m_1 = \frac{1}{2}n$. Mamy zatem rozwiązanie $a_{n/2} = n$ oraz $a_j = 1$ dla $j \neq \frac{1}{2}n$.

Dalej zakładamy, że $k \geqslant 2$. Niech $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$; oczywiście $S \geqslant 2k$. Z drugiej równości (1) wynika, że $n(S-k) > \frac{1}{2}n(n-1)$, równoważnie

$$2S - 2k + 1 > b_1 b_2 \ldots b_k. \quad (2)$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że b_1 jest największą z liczb $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Z nierówności $(a+x)(b-x) \leqslant ab$, prawdziwej dla $a \geqslant b$ i $x \geqslant 0$, wynika, że jeśli zwiększymy b_1 o pewną nieujemną stałą, a jedną z liczb b_i o tę stałą zmniejszymy, to iloczyn $b_1 b_2 \ldots b_k$ nie zwiększy się. Wnioskujemy z tego nierówność

$$b_1 b_2 \ldots b_k \geqslant \big(b_1 + (b_2 - 2) + \ldots + (b_k - 2)\big) \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{k-1}(S - 2k + 2).$$

Na mocy (2) oraz powyższej równości otrzymujemy

$$2S - 2k + 1 > 2^{k-1}(S - 2k + 2),$$

a po przekształceniu

$$2^{k-1}(2k-2) - 2k + 1 > (2^{k-1} - 2)S \geqslant (2^{k-1} - 2) \cdot 2k.$$

Musi być zatem $2k + 1 > 2^k$, co nie jest prawdą dla $k > 2$.

Możemy już zrezygnować z założenia, że b_1 jest największą z liczb $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Pozostaje zatem rozważyć $k = 2$. Nierówność (2) jest wtedy równoważna nierówności $(b_1 - 2)(b_2 - 2) < 1$. Możemy bez straty ogólności przyjąć $b_2 = 2$ – wtedy $b_1 = n/2$ i $n \geqslant 4$ jest parzyste. Po podstawieniu do równości (1) otrzymamy $m_1\left(\frac{n}{2} - 1\right) + m_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$, a po przekształceniu

$$m_2 - m_1 = \tfrac{n}{2}(n - 1 - m_1).$$

Ponieważ m_1 i m_2 są różnymi liczbami ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, mamy $n - 1 - m_1 = \pm 1$. Są zatem dwie możliwości:

$$\begin{cases} m_1 &= n-2 \\ m_2 &= \frac{3}{2}n - 2 \end{cases} \qquad \text{lub} \qquad \begin{cases} m_1 &= n \\ m_2 &= \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Pierwsza z nich jest możliwa tylko dla $n = 4$, bo dla $n > 4$ mamy $\frac{3}{2}n - 2 > n$. Otrzymujemy więc następujące rozwiązania: $a_{n-2} = \frac{n}{2}$, $a_{3n/2-2} = 2$ (pozostałe równe 1) dla $n = 4$ oraz $a_n = \frac{n}{2}$, $a_{n/2} = 2$ (pozostałe równe 1) dla $n \geqslant 4$. Dla $n = 4$ pierwsze rozwiązanie jest takie samo, jak drugie.

Ostatecznie istnieją następujące ciągi spełniające zadane równości:
dla $n = 1$: (1);
dla $n = 2$: $(2, 1)$;
dla parzystych $n \geqslant 4$:

$$\Bigg(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n/2-1}, n, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n/2}\Bigg), \qquad \Bigg(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n/2-1}, 2, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n/2-1}, \tfrac{n}{2}\Bigg).$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie wymienione ciągi spełniają wymagane warunki.

Zadanie C7 *(autor: Bartłomiej Bzdęga).*
W każdym polu kwadratowej tabeli 3×3 znajduje się liczba rzeczywista. W każdym wierszu iloczyn wpisanych liczb jest równy P. W każdej kolumnie wpisane liczby od góry do dołu tworzą niestały trójwyrazowy ciąg arytmetyczny, przy czym różnice tych ciągów należą do przedziału $[-1, 1]$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości P.

Szkic rozwiązania. Zauważmy, że wartość $P = 0$ jest osiągana – wystarczy wziąć tabelę o wierszach $[-2, -1, 0]$, $[-1, 0, 1]$, $[0, 1, 2]$. Jeżeli ponadto możliwe jest $P = P_0$, to możliwe jest każde $P = P_1 \in [-P_0, P_0] \setminus \{0\}$ – można pomnożyć wszystkie liczby w tabeli z $P = P_0$ przez $\sqrt[3]{P_1/P_0}$. Znajdziemy zatem największą możliwą wartość $P = P_{\max}$ i wówczas odpowiedzią będzie przedział $[-P_{\max}, P_{\max}]$.

Poszukamy teraz tabeli z największym $|P|$. Jeśli w jakiejś kolumnie mamy różnicę ciągu $r < 1$, to możemy pomnożyć tę kolumnę przez $1/r$ bez naruszania wymaganych własności tabeli. Wartość $|P|$ może wówczas jedynie wzrosnąć. Z tego wynika, że poszukiwana tabela, bez straty ogólności, wygląda następująco:

$x-1$	$y-1$	$z-1$
x	y	z
$x+1$	$y+1$	$z+1$

Porównując iloczyny, otrzymamy równości:

$$xyz - yz - zx - xy + x + y + z - 1 = xyz = xyz + yz + zx + xy + x + y + z + 1,$$

a po uproszczeniu i przekształceniach

$$(1)\ yz + zx + xy = -1, \qquad (2)\ x + y + z = 0, \qquad (3)\ x^2 + y^2 + z^2 = 2,$$

przy czym równość (3) jest różnicą kwadratu (2) i dwukrotności (1). Jeśli któraś z liczb x, y, z jest równa 0, to $P = 0$. Dalej niech $x, y, z \neq 0$. Z (2) wynika, że możemy bez utraty ogólności przyjąć (w razie czego mnożąc całą tabelę przez -1), że $z > 0$ oraz $x, y < 0$. Wobec tego $(x-1)(y-1)(z-1) = xyz > 0$, a więc $z > 1$. Na mocy (3) mamy

$$z^2 = 2 - (x^2 + y^2) \leqslant 2 - \tfrac{1}{2}(x+y)^2 = 2 - \tfrac{1}{2}z^2,$$

zatem $1 < z \leqslant \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Po podstawieniu do (1) równości $z = -x - y$ otrzymamy $x^2 + xy + y^2 = 1$, a więc $xy = (x+y)^2 - 1 = z^2 - 1$. Wobec tego

$$xyz = z^3 - z.$$

Na przedziale $\left(1, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$ jest to funkcja rosnąca zmiennej z, więc osiąga dla $z = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ maksimum równe $\frac{2}{9}\sqrt{3}$. Wartość ta jest osiągalna dla $x = y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ oraz $z = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Zbiór wszystkich możliwych wartości P jest zatem przedziałem $\left[-\frac{2}{9}\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}\right]$.

Zadanie C8 *(autor: Patryk Zubilewicz).*
Punkt D jest środkiem boku BC różnobocznego trójkąta ostrokątnego ABC. Dwusieczne kątów CAD i BAD przecinają odcinek BC w punktach odpowiednio P i Q. Okręgi opisane na trójkątach ABP i ACQ przecinają się w punkcie $X \neq A$. Dowieść, że $2|AX| > |AB| + |AC|$.

Szkic rozwiązania. Po dokonaniu inwersji względem punktu A otrzymujemy następujące zadanie:

Na okręgu opisanym na trójkącie ABC leży taki punkt D, że AD jest symedianą w tym trójkącie. Punkt X jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt BCD. Wykazać, że $|AX| < \frac{2|AC|\cdot|AB|}{|AC|+|AB|}$.

Niech a, b, c będą długościami boków naprzeciw wierzchołków A, B, C trójkąta ABC, zaś α, β, γ – miarami kątów przy tych wierzchołkach. Dodatkowo oznaczmy: E – środek łuku BC z punktem A; M – środek odcinka BC; K – punkt symetryczny do A względem M. Ponadto w trójkącie ABK: R – spodek dwusiecznej kąta ABK; S – punkt styczności okręgu wpisanego do odcinka AK; T – spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka B.
Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $b > c$. Wtedy $|BK| = b > c = |AB|$, ponadto $|\sphericalangle ABK| = \pi - \alpha > \pi/2$, więc pozostałe kąty trójkąta ABK są ostre. Punkty K, M, R, S, T, A leżą zatem w tej kolejności na odcinku AK. W szczególności zachodzi nierówność $|BS| < |BR|$.
Z własności kąta zewnętrznego w trójkącie AMC, a następnie z izogonalnego sprzężenia środkowej i symediany, otrzymujemy

$$|\sphericalangle BMS| = \gamma + |\sphericalangle CAM| = \gamma + |\sphericalangle BAD| = \gamma + |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle AEX|.$$

Na mocy twierdzenia sinusów

$$\frac{|MS|}{|EA|} = \frac{(b-c)/2}{|EA|} = \frac{(\sin\beta - \sin\gamma)/2}{\sin(\beta/2 - \gamma/2)} = \sin(\alpha/2).$$

Na mocy twierdzenia o trójliściu zastosowanego do trójkąta BCD, a następnie znów twierdzenia sinusów, mamy

$$\frac{|BM|}{|XE|} = \frac{a/2}{|BE|} = \frac{(\sin\alpha)/2}{\sin(\beta/2 + \gamma/2)} = \sin(\alpha/2).$$

Wnioskujemy, że trójkąt BMS jest podobny do trójkąta XEA w skali $\sin(\alpha/2)$. Z tego otrzymujemy

$$|AX| = \frac{|BS|}{\sin(\alpha/2)} < \frac{|BR|}{\sin(\alpha/2)} = \frac{\frac{2bc\cos((\pi-\alpha)/2)}{b+c}}{\sin(\alpha/2)} = \frac{2bc}{b+c},$$

co kończy dowód.

Autor sprawozdania: dr Bartłomiej Bzdęga;
recenzent: Sylwester Błaszczuk