ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

II Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2011r.

Organizacja konkursu

Druga edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2010/2011. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Odbywały się w okresie od marca do maja 2011r.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami i dyrekcjami szkół. Źródłem aktualnych informacji o konkursie pozostaje, w myśl regulaminu, strona internetowa *www.astagor.net/wlm*.

W konkursie wzięło udział 28 uczniów szkół średnich. Uczniowie rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca marca 2011r., zestaw B do końca kwietnia 2011r., zestaw C do końca maja 2011r. Każdy zestaw liczył 4 zadania, po jednym z każdego z działów: algebra z analizą, kombinatoryka, geometria, teoria liczb. Rozwiązania zadań oceniane były przez Komisję WLM w skali od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów, na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie II WLM odbyło się 17 czerwca 2011r., na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Po omówieniu rozwiązań zadań, uczestnicy, którzy wypadli najlepiej, otrzymali nagrody książkowe. Dwukrotny laureat I nagrody, Jędrzej Garnek, został uhonorowany pucharem Wielkopolskiej Ligi Matematycznej.

Wszyscy obecni na zakończeniu mieli możliwość wysłuchania wykładu prof. dra hab. Wojciecha Gajdy, dotyczącego głównie teorii liczb.

Komisja WLM

Przewodniczący

- prof. dr hab. Krzysztof Pawałowski

Członkowie

- dr Małgorzata Bednarska–Bzdęga
- mgr Bartłomiej Bzdęga

Wyniki konkursu

Komisja WLM postanowiła przyznać jedną nagrodę stopnia pierwszego, 2 nagrody stopnia drugiego, 4 nagrody stopnia trzeciego oraz 5 wyróżnień.

Nagroda I stopnia

Jędrzej Garnek (116 pkt.)
Uczeń 3 klasy VII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody II stopnia

Piotr Mizerka (101 pkt.)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Sylwester Swat (97 pkt.)
Uczeń 2 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Łukasz Nizio (89 pkt.)
Uczeń 3 klasy Liceum Ogólnokształcącego w Tarnowie Podgórnym.

Maria Nuc (85 pkt.)
Uczennica 2 klasy Liceum Ogólnokształcącego im. św. Marii Magdaleny w Poznaniu.

Wiktoriusz Robaszkiewicz (81 pkt.)
Uczeń 2 klasy Liceum Ogólnokształcącego im. św. Marii Magdaleny w Poznaniu.

Łukasz Michalak (77 pkt.)
Uczeń 2 klasy Liceum Ogólnokształcącego im. św. Marii Magdaleny w Poznaniu.

Wyróżnienia

Michał Gulczyński (65 pkt.)
Uczeń 3 klasy VII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Julia Kubiak (60 pkt.)
Uczennica 2 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Pleszewie.

Krzysztof Piecuch (54 pkt.)
Uczeń 2 klasy II Liceum Ogólnokształcącego w Pile.

Andrzej Kokosza (47 pkt.)
Uczeń 1 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Swarzędzu.

Sylwia Zmysłowska (44 pkt.)
Uczennica 1 klasy II Liceum Ogólnokształcącego w Lesznie.

Treści zadań

Zestaw A

A1. Najkrótsza przekątna dziewięciokąta foremnego o boku a ma długość d. Udowodnić, że jego najdłuższa przekątna ma długość $a + d$.

A2. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, e spełniają równości

$$a + b = c + d + e, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2.$$

Wykazać, że przynajmniej jedna z liczb a, b jest złożona.

A3. Mamy 60 żetonów, każdy o wartości $2, 3, 4, 5$ lub 6 złotych. Wykazać, że można wypłacić tymi żetonami kwotę 60 złotych, bez konieczności rozmiany.

A4. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Dowieść, że zachodzi następująca nierówność:

$$\sqrt{a - bc} + \sqrt{b - ca} + \sqrt{c - ab} \leqslant \sqrt{2},$$

o ile liczby występujące pod pierwiastkami są nieujemne.

Zestaw B

B1. Udowodnić, że dowolny wielościan wypukły posiada parzystą liczbę ścian będących wielokątami o nieparzystej liczbie boków.

B2. Dany jest okrąg o_1 i jego cięciwa AB. Okrąg o_2 jest styczny wewnętrznie do o_1 w punkcie C oraz do odcinka AB w punkcie D. Wykazać, że CD jest dwusieczną kąta ACB.

B3. Wielomian

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

nazywamy palindromicznym, jeżeli $a_n \neq 0$ oraz $a_k = a_{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Udowodnić, że iloczyn dwóch wielomianów palindromicznych jest wielomianem palindromicznym.

B4. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n, spełniające równanie

$$m^{m^2} = (2n^2)^{n^2}.$$

Zestaw C

C1. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x zależność

$$f(x) = f(f(x)) + x.$$

Udowodnić, że funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

C2. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg liczb całkowitych dodatnich, spełniający następujące własności:

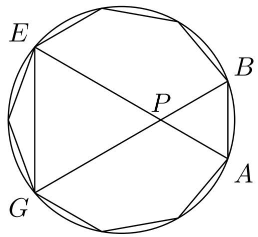
- każda liczba całkowita dodatnia występuje w tym ciągu dokładnie raz,
- każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest dzielnikiem lub wielokrotnością poprzedniego wyrazu.

C3. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$. Wykazać, że jeśli $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PDA$, to także $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$.

C4. Płaszczyznę podzielono na trójkąty równoboczne w ten sposób, że w każdym wierzchołku (będziemy dalej nazywać je węzłami) spotyka się sześć trójkątów. W każdym węźle znajduje się lampka, natomiast na każdym trójkącie jest włącznik, który zmienia stan lampek znajdujących się w węzłach będących wierzchołkami tego trójkąta (zgaszone zapalają się, a zapalone gasną). Rozstrzygnąć, czy zaczynając od sytuacji w której wszystkie lampki są zgaszone, możemy doprowadzić to tego, by paliła się dokładnie jedna lampka.

Rozwiązania

A1. Oznaczmy kolejne wierzchołki danego dziewięciokąta przez $A, B, C, \ldots, I$. Wtedy, zgodnie z warunkami zadania, $a = AB$ oraz $d = EG$. Najdłuższą przekątną dziewięciokąta (jedną z dziewięciu) jest AE.



Kąt ABG jest kątem wpisanym opartym na $\frac{1}{3}$ okręgu, zatem jego miara wynosi $60°$. W podobny sposób wnioskujemy, że

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle AEG = \sphericalangle BGE = 60°.$$

W takim razie trójkąty ABP i EGP są równoboczne. Stąd

$$AE = AP + PE = AB + GE = a + d,$$

co należało wykazać. $\square$

A2. Na mocy warunków zadania, prawdziwa jest następująca równość:

$$(a+b)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = (c+d+e)^2 - (d^2 + e^2),$$

która po uporządkowaniu przybiera postać

$$ab = c^2 + cd + ce + de = (c+d)(c+e).$$

Jeśli jedna z liczb a, b jest równa 1, to druga jest oczywiście złożona. Gdyby obie liczby a, b były pierwsze, to na mocy jednoznaczności rozkładu, zachodziłyby równości $a = c + d$ oraz $b = c + e$ (lub na odwrót), gdyż obie liczby $c + d$ i $c + e$ są większe od 1. W tej sytuacji otrzymujemy

$$a + b = c + d + c + e > c + d + e = a + b.$$

Sprzeczność ta dowodzi, że przynajmniej jedna z liczb a, b jest złożona. $\square$

A3. Dla $k = 2, 3, 4, 5, 6$ oznaczamy przez a_k liczbę żetonów o wartości k zł. Zauważmy, że jeśli zachodzi co najmniej jedna z nierówności:

$$a_2 + a_4 \geqslant 30, \quad a_3 + a_6 \geqslant 20, \quad a_5 \geqslant 12,$$

to bez trudu wypłacimy 60zł. Jeżeli zaś żadna z nich nie zachodzi, to

$$a_2 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 \leqslant 29 + 19 + 11 = 59 < 60,$$

co jest sprzeczne z warunkami zadania. □

A4. Skorzystamy z łatwej do udowodnienia nierówności $\frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, prawdziwej dla dowolnych liczb nieujemnych x i y. Otrzymujemy z niej

$$\frac{\sqrt{a-bc}+\sqrt{b-ca}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a-bc+b-ca}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b)(1-c)}{2}} = \frac{a+b}{\sqrt{2}},$$

gdyż $1 - c = a + b$ na mocy warunków zadania. Sumując tę nierówność z dwiema analogicznymi otrzymamy

$$\sqrt{a-bc}+\sqrt{b-ca}+\sqrt{c-ab} \leqslant \frac{a+b}{\sqrt{2}} + \frac{b+c}{\sqrt{2}} + \frac{c+a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

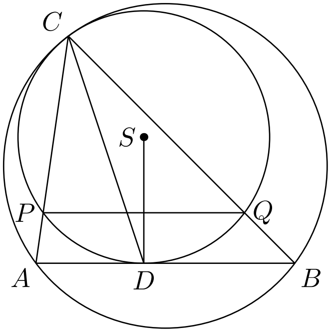
gdyż $a + b + c = 1$. □

B1. Niech s_n oznacza liczbę ścian danego wielościanu, będących $n-$kątami, natomiast k – liczbę jego krawędzi. Licząc wszystkie boki wszystkich ścian wielościanu, policzymy każdą krawędź dwukrotnie, zatem

$$2k = 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \ldots = 2(s_3 + 2s_4 + 2s_5 + 3s_6 + 3s_7 + \ldots) + (s_3 + s_5 + s_7 + \ldots),$$

co dowodzi, że $s_3 + s_5 + s_7 \ldots$ jest liczbą parzystą. □

B2. Rozważmy jednokładność względem punktu C, przeprowadzającą okrąg o_1 w o_2. Obrazami punktów A i B względem tej jednokładności są punkty P i Q przecięcia odpowiednio odcinków AC i BC z okręgiem o_2. Wnioskujemy stąd, że $PQ \parallel AB$.



Niech S bdzie środkiem okręgu o_2. Ponieważ $SD \perp AB$, zachodzi też $SD \perp PQ$, więc D jest środkiem łuku PQ. Stąd $\sphericalangle PCD = \sphericalangle QCD$, gdyż są to kąty wpisane, oparte na jednakowych łukach, a z tego wynika teza. $\square$

B3. Niech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Zauważmy, że dla $x \neq 0$

$$\begin{aligned} x^n P\left(\frac{1}{x}\right) &= x^n \left(\frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1}{x} + a_0\right) \\ &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

W takim razie wielomian P stopnia n jest palindromiczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Niech P i Q będą wielomianami palindromicznymi stopni odpowiednio n i m. Wtedy

$$R(x) = P(x)Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^m Q\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n+m} R\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wielomian R ma stopień $n+m$, zatem, na mocy wcześniej dowiedzionego faktu, jest on palindromiczny. $\square$

B4. Łatwo wykazać, że funkcja $f(x) = x^{x^2}$ jest ściśle rosnąca dla $x \geqslant 1$. Ponadto

$$f\left(x\sqrt{2}\right) = \left(x\sqrt{2}\right)^{\left(x\sqrt{2}\right)^2} = \left(x\sqrt{2}\right)^{2x^2} = \left(2x^2\right)^{x^2}.$$

Równanie z zadania przyjmuje więc postać $f(m) = f(n\sqrt{2})$, co jest równoważne $m = n\sqrt{2}$. Jest to jednak niemożliwe, gdyż $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, czyli nie można przedstawić jej w postaci $\frac{m}{n}$. Szukane liczby nie istnieją.

C1. Wstawiając $x = 0$ do równania danego w zadaniu, otrzymujemy $f(0) = f(f(0))$, zatem również $f(f(0)) = f(f(f(0)))$. Z drugiej strony, wstawiając $x = f(0)$ otrzymamy $f(f(0)) = f(f(f(0))) + f(0)$. Dwie uzyskane równości pozwalają wywnioskować, że $f(0) = 0$.
Niech x_0 będzie dowolnym miejscem zerowym funkcji f. Wtedy

$$0 = f(x_0) = f(f(x_0)) + x_0 = f(0) + x_0 = x_0,$$

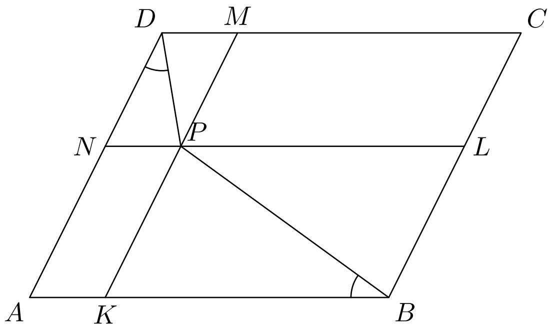
więc 0 jest jedynym miejscem zerowym funkcji f. $\square$

C2. Taki ciąg istnieje. Przykładem może być ciąg zdefiniowany w następujący sposób:

- $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,
- a_{2n+2} jest najmniejszą liczbą, która nie wystąpiła w ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$,
- a_{2n+1} jest najmniejszą wielokrotnością $a_{2n} \cdot a_{2n+2}$, która nie wystąpiła w ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$.

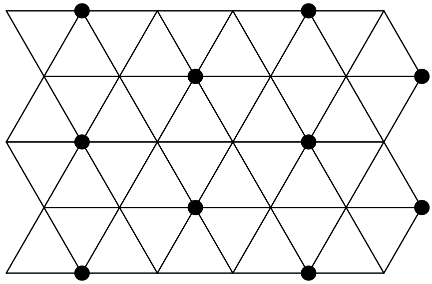
Drugi z warunków gwarantuje, że wszystkie liczby całkowite nieujemne wystąpią w ciągu, natomiast trzeci zapewnia, że każdy wyraz będzie wielokrotnością lub dzielnikiem poprzedniego. Żadna z liczb całkowitych dodatnich nie wystąpi w takim ciągu dwukrotnie; wynika to jasno ze sposobu definiowania kolejnych wyrazów.

C3. Przeprowadźmy przez punkt P proste równoległe do boków równoległoboku $ABCD$, aż do przecięcia się ich z bokami równoległoboku w punktach K, L, M, N.



Trójkąty PKB i PND są podobne, gdyż mają odpowiednie kąty równe. Zatem $PK : PN = BK : DN$, lub równoważnie $PK : PL = AK : CL$. Ponieważ $\sphericalangle AKP = \sphericalangle CLP$, trójkąty AKP i CLP są podobne – mają odpowiednie boki proporcjonalne oraz taki sam kąt pomiędzy nimi. Wnioskujemy stąd, że $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$, co należało wykazać. □

C4. Udowodnimy, że nie można zgodnie z regułami zadania zgasić wszystkich żarówek w sytuacji, gdy pali się dokładnie jedna z nich. Jest to równoważne tezie zadania. W tym celu wyróżnimy niektóre z żarówek, zaznaczając je na rysunku. Zróbmy to w ten sposób, by jedyna zapalona żarówka nie była wyróżniona.



Uruchomienie dowolnego włącznika zmienia stan dokładnie dwóch niewyróżnionych żarówek. W takim razie liczba włączonych żarówek, które nie są wyróżnione, pozostaje nieparzysta. To dowodzi, że nie można wyłączyć wszystkich żarówek.