ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

III Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2012r.

Organizacja konkursu

Trzecia edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2011/2012. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Odbywały się w okresie od marca do maja 2012r.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez plakaty rozwieszone w szkołach oraz kontakt z nauczycielami i dyrekcjami szkół. Źródłem aktualnych informacji o konkursie była strona internetowa *www.astagor.net/wlm*. Począwszy od kolejnej edycji, będzie to strona *wlm.wmi.amu.edu.pl*.

W konkursie wzięło udział 35 uczniów szkół średnich oraz jeden uczeń szkoły podstawowej. Uczniowie rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca marca 2012r., zestaw B do końca kwietnia 2012r., zestaw C do końca maja 2012r. Każdy zestaw liczył 4 zadania, po jednym z każdego z działów: algebra z analizą, kombinatoryka, geometria, teoria liczb. Rozwiązania zadań oceniane były przez Komisję WLM w skali od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów, na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie III WLM odbyło się 22 czerwca 2012r., na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Po omówieniu rozwiązań zadań, uczestnicy, którzy wypadli najlepiej, otrzymali nagrody książkowe.

Wszyscy obecni na zakończeniu mieli możliwość wysłuchania wykładu *O hipotezie Goldbacha*, który wygłosił dr Bartłomiej Bzdęga.

Komisja WLM

Przewodniczący

- prof. dr hab. Krzysztof Pawałowski

Członkowie

- dr Małgorzata Bednarska–Bzdęga
- dr Bartłomiej Bzdęga

Testerzy zadań

- Jędrzej Garnek
- Łukasz Nizio

Wyniki konkursu

Komisja WLM postanowiła przyznać jedną nagrodę stopnia pierwszego, 3 nagrody stopnia drugiego, 4 nagrody stopnia trzeciego, jedno wyróżnienie oraz jedną nagrodę specjalną.

Nagroda I stopnia

Piotr Mizerka (115 pkt.)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody II stopnia

Grzegorz Adamski (111 pkt.)
Uczeń 1 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Szamotułach.

Sylwia Hodlik (111 pkt.)
Uczennica 2 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w koninie.

Sylwester Swat (110 pkt.)
Uczeń 3 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Konrad Krakowski (104 pkt.)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Bartosz Biadasiewicz (100 pkt.)
Uczeń 3 klasy Liceum Ogólnokształcącego w Turku.

Maciej Kolanowski (99 pkt.)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Łukasz Michalak (93 pkt.)
Uczeń 3 klasy Liceum Ogólnokształcącego im. św. Marii Magdaleny w Poznaniu.

Wyróżnienie

Marcin Drzewiecki (71 pkt.)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagroda specjalna

Maciej Kolanowski - za redakcję rozwiązań zadań.

Treści zadań

Zestaw A

A1. Różne liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunek

$$x^2 - y = y^2 - z = z^2 - x.$$

Udowodnić, że $(x+y)(y+z)(z+x) = 1$.

A2. Przez $s(n)$ oznaczmy sumę cyfr zapisu dziesiętnego liczby całkowitej $n \geqslant 1$. Wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość wyrażenia $\frac{s(2n)}{s(n)}$.

A3. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$ oraz ciąg $n-1$ znaków mniejszości i większości. Wykazać, że liczby $1, 2, \ldots, n$ można tak wstawić między znaki, aby zachodzące nierówności były spełnione (na przykład dla $n = 5$ i ciągu znaków $(<, >, >, <)$ mamy $4 < 5 > 2 > 1 < 3$).

A4. Punkt T jest środkiem boku CD czworokąta wypukłego $ABCD$. Dowieść, że jeśli trójkąt ABT jest równoboczny, to $BC + DA \geqslant AB\sqrt{3}$.

Zestaw B

B1. Odcinek AB jest dłuższą podstawą trapezu $ABCD$, w którym zachodzi równość $\sphericalangle ACB + \sphericalangle CAD = 180°$. Udowodnić, że $AB \cdot AD = BC \cdot CD$.

B2. Funkcje $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniają dla dowolnej liczby naturalnej n następujące warunki:

$$g(n) = f(f(n)) = f(n+1), \qquad f(n) \neq n+1.$$

Wykazać, że funkcja g jest okresowa.

B3. Każdy z 2^n podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ wypisano na jednej z n kart ponumerowanych od 1 do n. Dowieść, że dla pewnego k na k-tej karcie znajduje się zbiór zawierający k oraz zbiór, który nie zawiera k.

B4. Rozstrzygnąć, czy istnieje ściśle rosnący ciąg liczb całkowitych dodatnich $(a_1, a_2, \ldots)$, który spełnia następujące warunki

$$a_n \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}, \qquad a_n < a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

dla wszystkich $n \geqslant 4$.

Zestaw C

C1. Udowodnić, że równanie

$$a^a + b^b = c^c$$

nie posiada rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c.

C2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą następujące związki:

$$\sphericalangle ABD = 2\sphericalangle ACD, \quad \sphericalangle ADB = 2\sphericalangle ACB.$$

Wykazać, że AC jest dwusieczną kąta BAD.

C3. W turnieju szachowym każdy gracz rozegrał z każdym partię, zakończoną wygraną, przegraną bądź remisem. Okazało się, że dla dowolnych graczy A, B, C jeśli A wygrał z B i B wygrał z C, to C wygrał z A. Dowieść, że jeśli gracz A_i wygrał z A_{i+1} dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz gracz A_n wygrał z A_1, to n jest liczbą podzielną przez 3.

C4. Wielomian P o współczynnikach rzeczywistych ma stopień n. Dowieść, że funkcja

$$f(x) = \binom{n}{0}P(x) - \binom{n}{1}P(x+1) + \binom{n}{2}P(x+2) - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}P(x+n)$$

jest stała.

Rozwiązania

A1. Z równości $x^2-y=y^2-z$ otrzymujemy $(x+y)(x-y)=y-z$, zatem $x+y=\frac{y-z}{x-y}$, ponieważ $x\neq y$. Analogicznie $y+z=\frac{z-x}{y-z}$ oraz $z+x=\frac{x-y}{z-x}$. Wobec tego

$$(x+y)(y+z)(z+x)=\frac{y-z}{x-y}\cdot\frac{z-x}{y-z}\cdot\frac{x-y}{z-x}=1,$$

co należało wykazać. $\square$

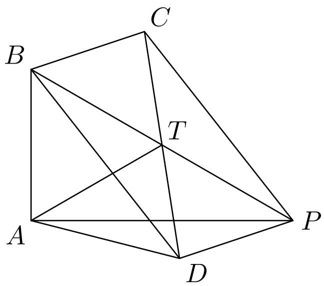
A2. Niech c_i oznacza liczbę cyfr i w zapisie dziesiętnym n. Wtedy

$$\begin{aligned} S(n) &= c_1+2c_2+3c_3+4c_4+5c_5+6c_6+7c_7+8c_8+9c_9,\\ S(2n) &= 2c_1+4c_2+6c_3+8c_4+c_5+3c_6+5c_7+7c_8+9c_9. \end{aligned}$$

W takim razie $2S(n)\geqslant S(2n)$ oraz $5S(2n)\geqslant S(n)$. Otrzymujemy zatem $\frac{1}{5}\leqslant\frac{s(2n)}{s(n)}\leqslant 2$. Równości zachodzą przykładowo dla $n=5$ i $n=1$.

A3. Dla $n=2$ teza jest oczywista. Przeprowadzimy dowód przez indukcję; załóżmy, że dla pewnej liczby k teza jest słuszna. Na mocy założenia indukcyjnego, możemy wpisać liczby od 1 do k w ten sposób, żeby pierwszych $k-1$ nierówności było w odpowiednią stronę. Jeśli k-tym znakiem jest $<$, to dopisujemy za nim $k+1$ i w tym przypadku teza jest spełniona dla $n=k+1$. W przeciwnym razie zwiększamy wszystkie uprzednio wpisane liczby o 1 i dopisujemy na końcu 1. Również w tym przypadku zachodzi teza dla $n=k+1$, co kończy dowód indukcyjny. $\square$

A4. Niech P będzie takim punktem, że T jest środkiem odcinka BP. Wówczas czworokąt $BCPD$ jest równoległobokiem, gdyż jego przekątne dzielą się na połowy. Otrzymujemy stąd $BC=PD$.

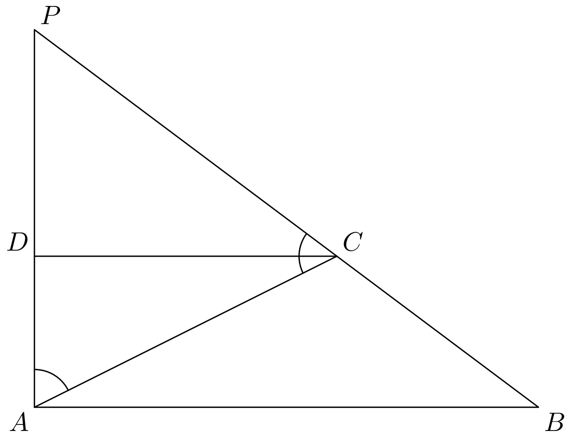


Ponieważ $\sphericalangle ATP=120^\circ$ oraz $AB=BT=AT=PT$, mamy $AP=AB\sqrt{3}$. W takim razie

$$BC+DA=DP+DA\geqslant AP=AB\sqrt{3},$$

co kończy dowód. $\square$

B1. Poprowadźmy proste BC oraz AD do wspólnego punktu P. Z warunków zadania wynika, że $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PCA$, zatem $AP = CP$.



Na mocy twierdzenia Talesa $\frac{AB}{CD} = \frac{BP}{CP} = \frac{AP}{DP}$. W takim razie

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BP - AP}{CP - DP} = \frac{BP - CP}{CP - DP} = \frac{BC}{AD},$$

co jest równoważne tezie. □

B2. Zauważmy najpierw, że

$$f(n) = f(f(n-1)) = f(f(f(n-2))) = \ldots = f^n(1),$$

gdzie f^n oznacza n-krotne złożenie funkcji f. Niech $c = f(1)$. Jeśli $c = 1$, to z warunków zadania wynika, że funkcja f jest stała, czyli w szczególności okresowa o okresie 1. Ponadto $c \neq 2$, więc możemy przyjąć, że $c \geqslant 3$. Wtedy $f^c(1) = f(c) = f^2(1)$, zatem dla $n \geqslant c$ mamy

$$f(n) = f^n(1) = f^{n-c}(f^c(1)) = f^{n-c}(f^2(1)) = f^{n-c+2}(1) = f(n-c+2).$$

Wobec $g(n) = f(n+1)$ zachodzi równość $g(n) = g(n-c+2)$ dla $n \geqslant c-1$, czyli $g(m+c-2) = g(m)$ dla $m \geqslant 1$, co kończy dowód. □

B3. Niech A oznacza zbiór tych $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dla których na k-tej karcie znajduje się przynajmniej jeden zbiór, który nie zawiera k. Zbiór A znajduje się na jednej z kart, niech będzie to karta o numerze a. Jeśli $a \notin A$, to na a-tej karcie nie ma zbiorów niezawierających a, czyli nie ma tam zbioru A, sprzeczność. W takim razie $a \in A$. Z określenia zbioru A wynika, że na a-tej karcie znajduje się przynajmniej jeden zbiór, który nie zawiera a. Na tej samej karcie jest zbiór A, który zawiera a, więc tezę zadania spełnia liczba a. □

B4. Załóżmy, że istnieje ciąg $(a_1, a_2, \ldots)$ spełniający warunki zadania. Wtedy

$$a_4 < a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 < 3a_4,$$

zatem $2a_4 = a_1 + a_2 + a_3$ na mocy podzielności $a_4 \mid a_1 + a_2 + a_3$. Udowodnimy przez indukcję, że dla $n \geqslant 4$ zachodzi równość $2a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$. Zakładając prawdziwość tej równości dla $n = k$ otrzymujemy

$$a_{k+1} < a_1 + a_2 + \ldots + a_k < 2a_k + a_k < 3a_{k+1},$$

więc $2a_{k+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ na mocy podzielności $a_{k+1} \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, co kończy dowód indukcyjny.
Na mocy udowodnionej indukcyjnie równości, dla $n \geqslant 4$ mamy

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \frac{1}{2}(2a_n + a_n) = \frac{3}{2}a_n.$$

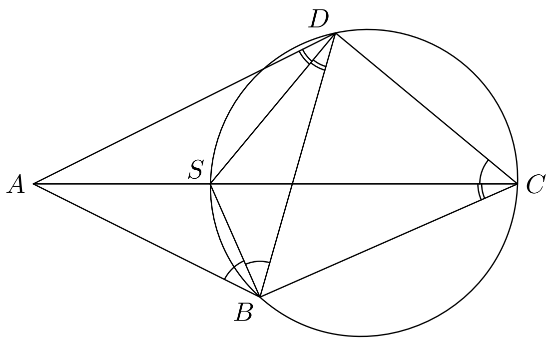
Wobec tego $a_{4+n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n a_4$, co oznacza, że dla dowolnego n zachodzi podzielność $2^n \mid a_4$. jest to sprzeczność, która dowodzi, że ciąg o żądanych własnościach nie istnieje.

C1. Gdyby takie liczby istniały, to oczywiście $c > 1$, $a, b \leqslant c - 1$ i w konsekwencji

$$a^a + b^b \leqslant 2(c-1)^{c-1} < 2c^{c-1} \leqslant c^c,$$

co jest sprzeczne z wyjściowym równaniem. □

C2. Niech okrąg opisany na trójkącie BCD przecina prostą AC w punkcie $S \neq C$. Z twierdzenia o kącie wpisanym mamy $\sphericalangle BCS = \sphericalangle BDS$ oraz $\sphericalangle DCS = \sphericalangle DBS$.



Z tego wnioskujemy, że BS oraz DS są dwusiecznymi odpowiednio $\sphericalangle ABD$ oraz $\sphericalangle ADB$. Teza zadania wynika z faktu, że w dowolnym trójkącie dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie. □

C3. Przeprowadzimy dowód przez indukcję zupełną. Dla $n \leqslant 3$ teza zachodzi, gdyż jedyną możliwością jest wtedy $n = 3$. Łatwo również udowodnić, że $n \neq 4$. Załóżmy, że $n > 4$ oraz, że teza zachodzi dla wszystkich $k < n$. Z warunków zadania wynika, że gracz A_{n-3} przegrał z A_{n-1}, który przegrał z A_1. W takim razie gracz A_{n-3} wygrał z A_1. Dla $k = n - 3$ mamy więc następującą sytuację: gracz A_i wygrał z A_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ oraz A_k wygrał z A_1. Na mocy założenia indukcyjnego $3 \mid k$, zatem $n = k + 3$ również jest liczbą podzielną przez 3, co kończy dowód.

C4. Dla $k \geqslant 0$ określmy wielomiany f_k w następujący sposób:

$$f_k(x) = \binom{k}{0}P(x) - \binom{k}{1}P(x+1) + \binom{k}{2}P(x+2) - \ldots + (-1)^k\binom{k}{k}P(x+k).$$

Zachodzą oczywiste równości $f_0 = P$ oraz $f_n = f$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} f_k(x) - f_k(x+1) &= \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\left(\binom{i-1}{k} + \binom{i}{k}\right)P(x+i) \\ &= \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{i}{k+1}P(x+i) \\ &= f_{k+1}(x), \end{aligned}$$

gdzie dla uproszczenia zapisu przyjęliśmy $\binom{-1}{k} = \binom{k+1}{k} = 0$.
Dla dowolnego wielomianu Q dodatniego stopnia, współczynniki przy najwyższych potęgach $Q(x)$ i $Q(x+1)$ są równe. Wobec tego oraz na mocy uprzednio dowiednionej równości, jeśli f_k nie jest wielomianem stałym, to stopień wielomianu f_{k+1} jest mniejszy niż stopień wielomianu f_k. Z powyższego oraz z faktów $f_0 = P$, $f_n = f$, łatwo wynika teza. $\square$