ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

IV Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2013r.

Organizacja konkursu

Czwarta edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2012/2013. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Odbywały się w okresie od stycznia do marca 2013r.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami i dyrekcjami szkół. Źródłem aktualnych informacji o konkursie jest strona internetowa *wlm.wmi.amu.edu.pl*.

W konkursie wzięło udział 22 uczniów szkół średnich oraz jedna uczennica gimnazjum. Uczniowie rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia 2013r., zestaw B do końca lutego 2013r., zestaw C do końca marca 2013r. Każdy zestaw liczył 4 zadania, po jednym z każdego z działów: algebra z analizą, kombinatoryka, geometria, teoria liczb. Rozwiązania zadań oceniane były przez Komisję WLM. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać jeden *duży* punkt i od 0 do 10 *małych* punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów, na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie IV WLM odbyło się 7 czerwca 2013r. na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Po omówieniu rozwiązań zadań, uczestnicy, którzy wypadli najlepiej, otrzymali nagrody książkowe. Zakończenie uświetnił wykład dra hab. Macieja Kandulskiego pod tytułem *A tak właściwie, to o czym mówi matematyka...? Czyli wędrując po tematach.*

Dodatkowo w ramach Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyły się trzy wykłady, z których każdy trwał 2×90 minut:

- 2 lutego prof. dr hab. Krzysztof Pawałowski wygłosił wykład pod tytułem *Teoria węzłów i splotów a topologia rozmaitości niskowymiarowych.*
- 9 marca dr Bartłomiej Bzdęga wygłosił wykład pod tytułem *O równaniach wielomianowych i teorii Galois.*
- 6 kwietnia dr Małgorzata Bednarska-Bzdęga wygłosiła wykład pod tytułem *Zbijak, kółko i krzyżyk oraz inne gry kombinatoryczne.*

Osoby, które wysłuchały wykładów, zostały zaproszone na poczęstunek przy kawie i herbacie.

Komisja WLM

Przewodniczący

- prof. dr hab. Krzysztof Pawałowski

Członkowie

- dr Małgorzata Bednarska–Bzdęga
- dr Bartłomiej Bzdęga
- Jędrzej Garnek

Pomoc w organizacji konkursu

- Łukasz Nizio
- Piotr Mizerka
- Sylwester Swat

Wyniki konkursu

Komisja WLM postanowiła przyznać jedną nagrodę stopnia pierwszego, 2 nagrody stopnia drugiego, 3 nagrody stopnia trzeciego oraz 4 wyróżnienia. Obok nazwisk laureatów podajemy ich wyniki; pierwszy oznacza liczbę dużych, a drugi (w nawiasie) małych punktów.

Nagroda I stopnia

Grzegorz Adamski 12 (115)
Uczeń 2 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Szamotułach.

Nagrody II stopnia

Sylwia Hodlik 11 (105)
Uczennica 3 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Koninie.

Mieczysław Krawiarz 11 (100)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Andrzej Szczesiak 8 (78)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Kamil Duczmal 8 (64)
Uczeń 1 klasy VII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Klaudia Walkowiak 7 (70)
Uczennica 3 klasy II Gimnazjum w Puszczykowie.

Wyróżnienia

Agata Nowicka 6 (57)
Uczennica 1 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Jarocinie.

Katarzyna Jóźwiak 6 (55)
Uczennica 1 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Jarocinie.

Marcin Drzewiecki 5 (44)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Tomasz Kałużny 5 (42)
Uczeń 1 klasy XVI Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Treści zadań

Zestaw A

A1. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba naturalna, która jest mniejsza od iloczynu swoich cyfr w zapisie dziesiętnym.

A2. Liczby a, b, c, d są całkowite dodatnie i różne. Udowodnić, że przynajmniej dwie spośród liczb

$$|ab - cd|, \quad |ac - bd|, \quad |ad - bc|$$

są większe od najmniejszej z liczb a, b, c, d.

A3. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią oraz niech $A \subset \{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ będzie zbiorem k-elementowym. Każdy podzbiór zbioru A ma sumę elementów różną od k. W zależności od n wyznaczyć największą możliwą liczbę k.

A4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Wykazać, że istnieje punkt P, leżący na tej samej płaszczyźnie co trójkąt ABC, dla którego zachodzą równości

$$AB^2 - CP^2 = BC^2 - AP^2 = CA^2 - BP^2.$$

Zestaw B

B1. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są równości

$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle BEC = \sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC.$$

Udowodnić, że $AB = BC$.

B2. Liczby dodatnie a, b, c spełniają równość $a + b + c = 1$. Wykazać, że

$$\frac{3a-1}{1-a^2} + \frac{3b-1}{1-b^2} + \frac{3c-1}{1-c^2} \geqslant 0.$$

B3. Na płaszczyźnie leży $n \geqslant 3$ punktów. Wszystkie odcinki o końcach w tych punktach mają różne długości. Wypiszmy te długości w porządku malejącym: $d_1 > d_2 > d_3 > \ldots$. Wykazać, że $d_1 \leqslant d_n + d_{n-1}$.

B4. Niech $a \geqslant 2$ i $n \geqslant 1$ będą liczbami całkowitymi. Dowieść, że jeśli liczba $a^{2n} + a^n + 1$ jest pierwsza, to n jest potęgą trójki o wykładniku całkowitym nieujemnym.

Zestaw C

C1. Dane są liczby całkowite $a > b > 0$ oraz taka liczba pierwsza $p > 3$, że p^2 jest dzielnikiem $a^3 - b^3$. Udowodnić, że $p < a\sqrt{3}$.

C2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta prostopadła do CI, przechodząca przez punkt I, przecina odcinki AC i BC w punktach odpowiednio P i Q. Wykazać, że $AP + BQ < AB$.

C3. W zależności od liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć liczbę ciągów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liczb rzeczywistych, spełniających układ równań

$$\begin{cases} x_1^2 & = 2x_1x_2 + 1, \\ x_2^2 & = 2x_2x_3 + 1, \\ \ldots & \\ x_{n-1}^2 & = 2x_{n-1}x_n + 1, \\ x_n^2 & = 2x_nx_1 + 1. \end{cases}$$

C4. Każdej parze uporządkowanej (x, y) elementów zbioru n-elementowego A przyporządkowujemy $F(x, y) \in A$, przy czym dla wszystkich $x, y \in A$ zachodzi równość

$$F(F(x, y), F(y, x)) = F(F(y, x), F(x, y)).$$

Dowieść, że istnieje przynajmniej $n^{7/3}$ uporządkowanych czwórek (a, b, c, d) elementów zbioru A, dla których jednocześnie zachodzą równości $F(a, b) = F(c, d)$ i $F(b, a) = F(d, c)$.

Szkice rozwiązań

A1. Weźmy dowolną liczbę naturalną n i oznaczmy przez przez $I(n)$ iloczyn jej cyfr, przez k liczbę jej cyfr, a przez a jej pierwszą cyfrę. Wtedy zachodzą nierówności

$$I(n) \leqslant a \cdot 9^{k-1} \leqslant a \cdot 10^{k-1} \leqslant n.$$

To dowodzi, że nie istnieje liczba n, dla której $I(n) > n$. $\square$

A2. Bez straty ogólności można założyć, że $a > b > c > d$. Wtedy $|ab-cd| = ab-cd$ oraz $|ac-bd| = ac-bd$. Mamy

$$ab - cd > ac - bd > (b+1)d - bd = d,$$

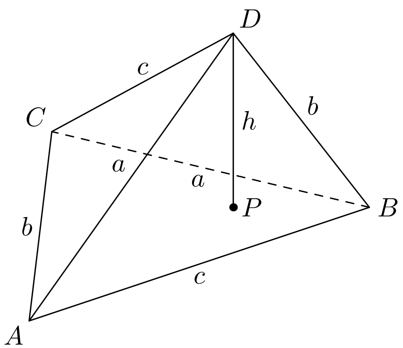
co dowodzi tezy. $\square$

A3. Rozwiażmy zbiór $B = \{1, 2, \ldots, n\} \cup \{k-1, k-2, \ldots, k-n\}$. Jeśli $k = |A| > 2n$, to $|B| = 2n$ i wtedy $|A \cap B| \geqslant n+1$. Zatem na mocy zasady szufladkowej, istnieje taka liczba $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, że $\{i, k-i\} \subset A \cap B \subset A$, co jest sprzeczne z warunkami zadania. Wobec tego $k \leqslant 2n$.
Na koniec zauważmy, że zbiór

$$A = \{n, n+1, \ldots, 2n-1\} \cup \{2n+1, 2n+2, \ldots, 3n\}$$

posiada dokładnie $2n$ elementów i spełnia warunki zadania. Zatem szukaną liczbą jest $k = 2n$.

A4. Rozważmy czworościan $ABCD$ o przystających ścianach, czyli taki, w którym $AB = CD$, $BC = AD$, $CA = BD$. Czworościan taki istnieje dla dowolnego trójkąta ostrokątnego ABC. Niech DP będzie wysokością czworościanu $ABCD$.



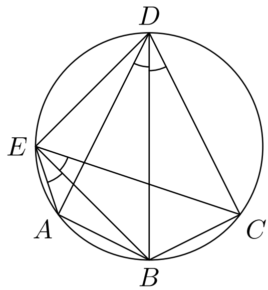
Na mocy twierdzenia Pitagorasa zachodzą równości:

$$DP^2 = AD^2 - AP^2 = BC^2 - AP^2$$
$$DP^2 = BD^2 - BP^2 = CA^2 - BP^2$$
$$DP^2 = CD^2 - CP^2 = AB^2 - CP^2.$$

Określony punkt P spełnia warunki zadania, zatem taki punkt istnieje dla każdego trójkąta ostrokątnego ABC. $\square$

B1. Udowodnimy najpierw, że na pięciokącie $ABCDE$ można opisać okrąg.

Ponieważ $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BEC$ oraz punkty D i E leżą po tej samej stronie prostej BC (pięciokąt $ABCDE$ jest wypukły), wnioskujemy, że na czworokącie $BCDE$ można opisać okrąg. Analogicznie udowadniamy, że na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg. Okręgi te mają punkty wspólne B, D, E, więc są identyczne i opisane na pięciokącie $ABCDE$.
Teraz na mocy równości kątów $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC$ wnioskujemy równość łuków AB i BC, a co za tym idzie, równość odcinków AB i BC. □



B2. Na mocy łatwej do udowodnienia nierówności $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqslant \frac{2}{x+y}$, prawdziwej dla wszystkich $x, y > 0$, otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}\right) \geqslant \frac{2}{2-a-b} = \frac{2}{1+c}$$

oraz dwie nierówności analogiczne. Sumując te nierówności stronami, dostajemy

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

Dla $x \neq \pm 1$ mamy $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1+x} = \frac{3x-1}{1-x^2}$, zatem nierówność ta jest równoważna tezie. □

B3. Niech A i B będą takimi punktami spośród n danych, że $AB = d_1$. Pozostałe punkty nazwijmy $C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}$ w taki sposób, by zachodziły nierówności

$$\max\{AC_1, BC_1\} > \max\{AC_2, BC_2\} > \ldots > \max\{AC_{n-2}, BC_{n-2}\}.$$

Wtedy $\max\{AC_{n-2}, BC_{n-2}\} \leqslant d_{n-1}$, gdyż mamy przynajmniej $n-2$ odcinków o większej długości (są to AB oraz dłuższy z każdej pary odcinków $\{AC_k,\ BC_k\}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n-3$). Zatem $\min\{AC_{n-2}, BC_{n-2}\} \leqslant d_n$. Korzystając z nierówności trójkąta, otrzymujemy

$$\begin{aligned} d_1 &\leqslant AC_{n-2} + BC_{n-2} = \max\{AC_{n-2}, BC_{n-2}\} + \min\{AC_{n-2}, BC_{n-2}\} \\ &\leqslant d_{n-1} + d_n, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

B4. Załóżmy nie wprost, że n nie jest potęgą trójki. Wtedy $n = 3^k \cdot m$, gdzie $3 \nmid m$ oraz $m > 1$. Mamy zatem $a^n = (a^{3^k})^m = b^m$ dla pewnej liczby całkowitej $b > 1$. Zauważmy, że

$$a^{2n} + a^n + 1 = b^{2m} + b^m + 1 = b^{m-1}(b^2 + b + 1) + (b^{m+1} - 1)(b^{m-1} - 1).$$

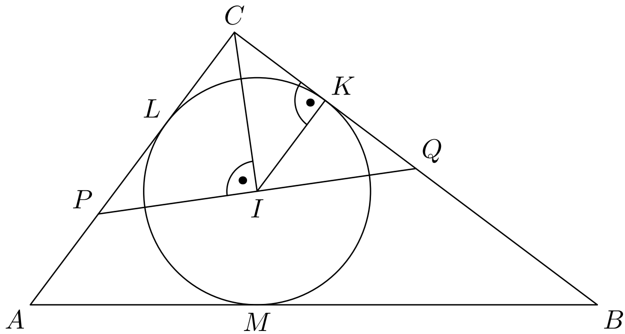
Jedna z liczb $m+1$, $m-1$ jest podzielna przez 3 i dodatnia, gdyż $m > 1$; oznaczmy ją przez $3t$. Na mocy równości

$$b^{3t} - 1 = (b^3 - 1)(1 + b^3 + b^6 + \ldots + b^{3(t-1)})$$

oraz $b^3 - 1 = (b-1)(b^2 + b + 1)$, wnioskujemy, że liczba $b^{2m} + b^m + 1$ jest podzielna przez $b^2 + b + 1$. Jest to dzielnik właściwy, gdyż $b > 1$ i $m > 1$. Zatem $a^{2n} + a^n + 1$ jest liczbą złożoną. $\square$

C1. Zachodzi oczywista równość $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Jeśli $p \mid a - b$, to $p \leqslant a - b < a < a\sqrt{3}$ i teza zachodzi. W przeciwnym razie $p^2 \mid a^2 + ab + b^2$, więc $p^2 \leqslant a^2 + ab + b^2 < 3a^2$ i również teza zachodzi. $\square$

C2. Niech K, L, M oznaczają punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC do boków odpowiednio BC, CA, AB.



Punkt K jest spodkiem wysokości trójkąta prostokątnego CIQ opuszczonej na przeciwprostokątną CQ, więc leży on na odcinku CQ i w konsekwencji $BK > BQ$. Analogicznie udawadniamy, że $AL > AP$.
Ponieważ $AL = AM$ i $BK = BM$, zachodzi nierówność

$$AP + BQ < AL + BK = AB,$$

co kończy dowód. $\square$

C3. Przyjmijmy $x_0 = x_n$. Obrazem funkcji $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \mathrm{ctg}\ x$ jest cały zbiór liczb rzeczywistych, możemy więc podstawić $x_i = \mathrm{ctg}\ \alpha_i$. Otrzymujemy wtedy

$$x_{i+1} = \frac{x_i^2 - 1}{2x_i} = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha_i - 1}{2\mathrm{ctg}\ \alpha_i} = \mathrm{ctg}\ 2\alpha_i.$$

Stąd $x_i = \mathrm{ctg}\ 2^i\alpha$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$, gdzie $x_0 = \mathrm{ctg}\ \alpha$ oraz $\alpha \in (0, \pi)$. Ponieważ $x_0 = x_n$, mamy $2^n\alpha = \alpha + k\pi$, stąd $\alpha = \frac{k\pi}{2^n-1}$. To daje dokładnie $2^n - 2$ możliwych różnych wartości α, którym odpowiadają różne wartości x_0, czyli różne ciągi $(x_1, \ldots, x_n)$. Odpowiedzią jest więc $2^n - 2$.

C4. Oprzemy się na następującym lemacie:

Lemat. Niech X i Y będą zbiorami skończonymi i niech $f : X \to Y$. Wtedy istnieje przynajmniej $|X|^2/|Y|$ par (x_1, x_2) elementów zbioru X, dla których $f(x_1) = f(x_2)$.

Dowód lematu: Niech $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ oraz $|X| = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$, gdzie k_i elementów zbioru X przyjmuje wartość y_i. Wtedy liczba takich par wynosi dokładnie $k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_m^2$, co na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową jest nie mniejsze niż $|X|^2/|Y|$. □

Rozważmy teraz funkcję $G : A \times A \to A \times A$ określoną wzorem

$$G(a, b) = (F(a, b), F(b, a)).$$

Niech B będzie zbiorem wartości funkcji G, natomiast C zbiorem wartości $G \circ G$. Z warunków zadania

$$G(G(a, b)) = G(F(a, b), F(b, a)) = (F(F(a, b), F(b, a)), F(F(b, a), F(a, b))) = (c, c)$$

dla pewnego $c \in A$, z czego wnioskujemy, że $|C| \leqslant n$. Zastosujmy udowodniony wcześniej lemat do funkcji $G : A \to B$ oraz $G : B \to C$. Wnioskujemy, że istnieje przynajmniej $\frac{|A|^4}{|B|}$ i odpowiednio przynajmniej $\frac{|B|^2}{|C|}$ par par $((a, b), (c, d))$ (równoważnie: czwórek (a, b, c, d)), dla których zachodzi równość $G(a, b) = G(c, d)$. Pozostaje zauważyć, że

$$\left(\max\left\{\frac{|A|^4}{|B|}, \frac{|B|^2}{|C|}\right\}\right)^3 \geqslant \left(\frac{|A|^4}{|B|}\right)^2 \cdot \frac{|B|^2}{|C|} = \frac{|A|^8}{|C|} \geqslant \frac{n^8}{n} = n^7,$$

oraz że $G(a, b) = G(c, d)$ jest równoważne temu, że zachodzą jednocześnie warunki $F(a, b) = F(c, d)$ i $F(b, a) = F(d, c)$. □