ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

V Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2014r.

Organizacja konkursu

Piąta edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2013/2014 i była współfinansowana przez miasto Poznań w ramach projektu *Matematyka dla Zuchwałych*. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Odbywały się w okresie od stycznia do marca 2014r.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zaintersowanymi. Warto dodać, że utworzony został profil WLM na Facebooku. Źródłem aktualnych informacji o konkursie jest strona internetowa *wlm.wmi.amu.edu.pl*.

W konkursie wzięło udział 30 uczniów szkół średnich oraz jedna uczennica gimnazjum. Uczestnicy reprezentowali szkoły z Poznania (9 uczniów), Leszna (7), Krotoszyna (5), Jarocina, Pleszewa, Środy WLKP (po 2) oraz Grodziska WLKP, Kalisza, Szamotuł, Wolsztyna (po 1).

Uczniowie rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia 2014r., zestaw B do końca lutego 2014r., zestaw C do końca marca 2014r. Każdy zestaw liczył po 5 zadań z różnych działów matematyki. Rozwiązania zadań oceniane były przez Komisję WLM. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać jeden *duży* punkt i od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów, na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie V WLM odbyło się 6 czerwca 2014r. na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Uczestnicy, którzy wypadli najlepiej, otrzymali nagrody książkowe, a zdobywcy trzech pierwszych miejsc zostali zaproszeni na obóz matematyczny do Kwiejc. Wszyscy obecni na zakończeniu mogli wysłuchać wykładu dra Bartłomieja Bzdęgi pod tytułem *Wybierzmy najmniejszy... czyli indukcja w ładnym opakowaniu.*

Dodatkowo zorganizowane zostały następujące trzy wykłady:

- 29 marca dr Bartłomiej Bzdęga wygłosił wykład pod tytułem *Problemy dotyczące liczb pierwszych*, który trwał 2×90 minut.
- 26 kwietnia mgr Bartosz Naskręcki wygłosił 90-minutowy wykład pod tytułem *Jak zawiązać krawat?*
- również 26 kwietnia mgr Monika Naskręcka wygłosiła 90-minutowy wykład pod tytułem *Jak daleko od wektora do gospodarki i czy można modelować giełdę?*

Osoby, które wysłuchały wykładów, zostały zaproszone na poczęstunek przy kawie i herbacie.

Komisja WLM

Przewodniczący

- prof. dr hab. Krzysztof Pawałowski

Członkowie

- dr Małgorzata Bednarska–Bzdęga
- dr Bartłomiej Bzdęga
- Jędrzej Garnek

Pomoc w organizacji konkursu

- Łukasz Nizio
- Piotr Mizerka
- Sylwester Swat

Wyniki konkursu

Komisja WLM postanowiła przyznać 2 nagrody stopnia pierwszego, 3 nagrody stopnia drugiego, 4 nagrody stopnia trzeciego oraz 7 wyróżnień. Obok nazwisk laureatów podajemy ich wyniki; pierwszy oznacza liczbę dużych, a drugi (w nawiasie) - małych punktów.

Nagrody I stopnia

Andrzej Szczesiak 15 (144)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Mieczysław Krawiarz 15 (143)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody II stopnia

Grzegorz Adamski 14 (139)
Uczeń 3 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Szamotułach.

Maciej Kolanowski 14 (133)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wojciech Wawrów 14 (133)
Uczeń 1 klasy Liceum Ogólnokształcącego im. św. Marii Magdaleny w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Adam Sobecki 13 (128)
Uczeń 2 klasy III Liceum Ogólnokształcącego w Kaliszu.

Klaudia Walkowiak 12 (116)
Uczennica 1 klasy Liceum Ogólnokształcącego im. św. Marii Magdaleny w Poznaniu.

Kamil Duczmal 11 (111)
Uczeń 2 klasy VII Liceum Ogólnokształcącego w Kaliszu.

Daniel Moździerz 11 (104)
Uczeń 2 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Pleszewie.

Wyróżnienia

Aleksandra Banach 9 (88)
Uczennica 2 klasy Liceum Ogólnokształcącego w Grodzisku WLKP.

Marcin Drzewiecki 9 (80)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Tomasz Fengier 9 (78)
Uczeń 3 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Pleszewie.

Agata Nowicka 8 (84)
Uczennica 2 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Jarocinie.

Aleksander Kasprzak 8 (76)
Uczeń 3 klasy II Liceum Ogólnokształcącego w Lesznie.

Paweł Kwapisz 8 (71)
Uczeń 3 klasy II Liceum Ogólnokształcącego w Lesznie.

Katarzyna Jóźwiak 6 (64)
Uczennica 2 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Jarocinie.

Treści zadań

Zestaw A

A1. Rozwiązać równanie $a + b = a^2 - ab + b^2$ w liczbach całkowitych a i b.

A2. Dany jest trójkąt ABC. Punkty P, Q i R leżą na odcinkach odpowiednio BC, CA i AB, przy czym AP jest dwusieczną kąta BAC oraz zachodzą równości $\sphericalangle BPR = \sphericalangle CPQ = \sphericalangle BAC$. Wykazać, że trójkąty BPR i CPQ są przystające.

A3. W zależności od liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć liczbę rozwiązań układu

$$\begin{cases} x_1x_2 &= x_1 + x_2, \\ x_2x_3 &= x_2 + x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}x_n &= x_{n-1} + x_n, \\ x_nx_1 &= x_n + x_1, \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych.

A4. Dwusieczne kątów wewnętrznych A i B trójkąta ABC przecinają odcinki BC i CA w punktach odpowiednio P i Q. Wykazać, że jeżeli symetralne odcinków AP i BQ przecinają się na odcinku AB, to $AB^2 = BC \cdot CA$.

A5. Na tablicy napisano pewnien skończony ciąg o wyrazach w zbiorze $\{1, 2, 3\}$. Liczba jedynek na miejscach parzystych jest taka sama, jak na nieparzystych; analogicznie dla dwójek i trójek. W danym momencie możemy wykonać jedną z dwu operacji:

1. Jeśli dwa kolejne wyrazy są równe, to można je zmazać;
2. Jeśli trzy kolejne wyrazy x, y, z są różne, to można je zastąpić przez z, y, x.

Dowieść, że stosując te operacje, możemy całkowicie wymazać wyjściowy ciąg.

Zestaw B

B1. Czworokąt $ABCD$ jest wypukły. Punkty P oraz Q są środkami odcinków odpowiednio CD i AB. Wykazać, że jeśli $AP \parallel CQ$ i $BP \parallel DQ$, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

B2. Wykazać, że liczba

$$\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ jedynek}}\underbrace{222\ldots2}_{n \text{ dwójek}}$$

jest iloczynem pewnych dwóch kolejnych liczb naturalnych.

B3. Ustalmy liczbę naturalną n. Niech A oznacza zbiór punktów płaszczyzny (x, y) różnych od $O = (0,0)$, o współrzędnych x i y całkowitych, spełniających warunki $|x| \leqslant n$ i $|y| \leqslant n$. W zależności od n znaleźć najmniejszą liczbę m o następującej własności: Każdy m-elementowy podzbiór zbioru A zawiera takie punkty P i Q, że kąt POQ jest prosty.

B4. Dowieść, że jeśli a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to prawdziwa jest nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2.$$

B5. Wyznaczyć wszystkie niestałe wielomiany P o współczynnikach całkowitych, spełniające następujący warunek: Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n co najwyżej jedna z liczb $P(1), P(2), \ldots, P(2n-1)$ dzieli się przez n.

Zestaw C

C1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek

$$xf(x) + f(-x) = 1.$$

C2. W pewnym kraju każde dwa spośród $n \geqslant 3$ miast są połączone drogą jednokierunkową, ale z każdego miasta można dojechać do dowolnego innego (niekoniecznie bezpośrednio). Nazwijmy trójkątem takie trzy miasta A, B, C, że istnieją bezpośrednie drogi z A do B, z B do C i z C do A. Wykazać, że każde miasto należy do pewnego trójkąta.

C3. Liczby naturalne a i b są dzielnikami n. Wykazać, że jeśli liczba $\frac{n}{a} + \frac{n}{b}$ jest podzielna przez a i b, to liczba n jest podzielna przez $\frac{(\mathtt{NWW}(a,b))^2}{\mathtt{NWD}(a,b)}$.

C4. Wysokość opuszczona na bok BC trójkąta ostrokątnego ABC ma długość równą średniej arytmetycznej długości jego wszystkich boków. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie i mają jednakowe promienie r. Ponadto okrąg o_1 jest styczny do odcinków AB i BC, natomiast okrąg o_2 jest styczny do odcinków BC i CA. Dowieść, że $BC = 5r$.

C5. Ciąg (a) zdefiniowany jest następująco:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{k+1} = \frac{1}{1 + a_k - a_k^2} \text{ dla } k \geqslant 1.$$

Dowieść, że $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n < \frac{1}{\sqrt{2n}}$ dla wszystkich $n \geqslant 1$.

Szkice rozwiązań

A1. Równanie z zadania równoważne jest następującemu:

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (a-b)^2 = 2,$$

co łatwo sprawdzić przez proste wymnożenie. Zatem jedna z liczb $(a-1)^2$, $(b-1)^2$, $(a-b)^2$ jest równa 0, a pozostałe są równe 1.

Jeśli $a-b=0$, to $(a-1)^2 = (b-1)^2 = 1$, co daje $a=b=0$ lub $a=b=2$.

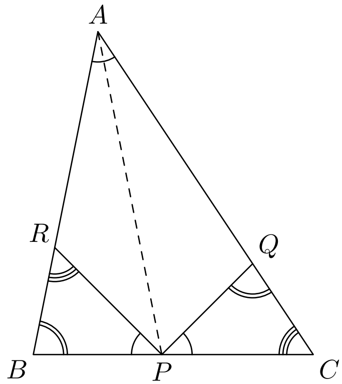
Jeśli $a-1=0$, to $a=1$ oraz $(b-1)^2=1$, zatem $b=0$ lub $b=2$.

Jeśli $b-1=0$, to $b=1$ i analogicznie $a=0$ lub $a=2$.

Podsumowując, równanie spełniają pary: $(0,0)$, $(2,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,1)$, $(2,1)$.

A2. Prosty rachunek na kątach pokazuje, że trójkąty BPR oraz QPC są podobne na mocy cechy (k,k,k). Skala ich podobieństwa jest równa stosunkowi ich wysokości poprowadzonych z wierzchołka P. Te wysokości są odległościami punktu P od odcinków AB i AC, więc są jednakowe, ponieważ AP jest dwusieczną kąta BAC.

To kończy dowód, że trójkąty BRP i QPC są przystające. $\square$



A3. Zauważmy najpierw, że $x_1, \ldots, x_n \neq 1$. Odejmując stronami równanie nr $i+1$ od i-tego, otrzymamy $x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_{i+2} = x_i - x_{i+2}$, gdzie przyjmujemy $x_{n+j} = x_j$. Równoważnie $(x_{i+1}-1)(x_i - x_{i+2}) = 0$, zatem $x_i = x_{i+2}$, bo $x_{i+1} \neq 1$. Wobec tego dla n nieparzystych mamy

$$x = x_1 = x_3 = \ldots = x_n = x_2 = x_4 = \ldots = x_{n-1},$$

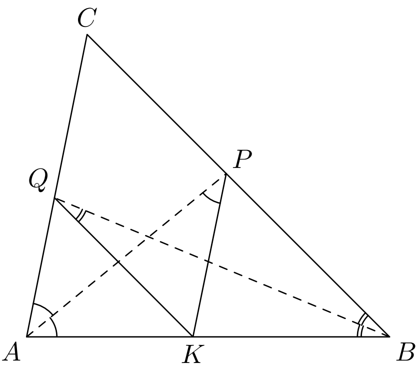
Przy czym $x^2 = 2x$ z pierwszego równania. Z tego wnioskujemy, że $x = 0$ lub $x = 2$. Zatem dla n nieparzystych mamy dwa rozwiązania: $(0,0,\ldots,0)$ i $(2,2,\ldots,2)$; bezpośrednio sprawdzmy, że spełniają one układ równań z zadania.

Jeśli n jest liczbą parzystą, to ławo sprawdzić, że układ posiada rozwiązania postaci

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x, y, x, y, \ldots, x, y),$$

gdzie $xy = x + y$. W tym przypadku rozwiązań jest nieskończenie wiele.

A4. Niech K będzie punktem przecięcia symetralnych odcinków AP i BQ, leżącym na AB. Mamy $AK = KP$, zatem $\sphericalangle APK = \sphericalangle KAP = \sphericalangle CAP$ i w konsekwencji $KP \parallel AC$. Zatem trójkąty ABC i KBP są podobne.



Stąd otrzymujemy $\frac{AB}{BK} = \frac{AC}{KP}$, zatem

$$AB = \frac{AC \cdot BK}{KP} = \frac{AC \cdot BK}{AK}.$$

Analogicznie dowodzimy równości

$$AB = \frac{BC \cdot AK}{KQ} = \frac{BC \cdot AK}{BK}.$$

Mnożąc powyższe dwie równości stronami, otrzymujemy tezę. □

A5. Po zastosowaniu którejkolwiek z operacji nasz ciąg nadal będzie spełniał warunki zadania, zatem wystarczy udowodnić, że każdy taki ciąg można skrócić.
Jeśli pewne dwa kolejne wyrazy ciągu są jednakowe, to stosujemy operację nr 1 i skracamy ciąg. Załóżmy więc, że tak nie jest. Wtedy znajdziemy dwa jednakowe wyrazy tego ciągu, które stoją na miejscach o różnej parzystości i pomiędzy którymi znajdują się wyłącznie inne wyrazy. Zatem nasz ciąg wygląda następująco:

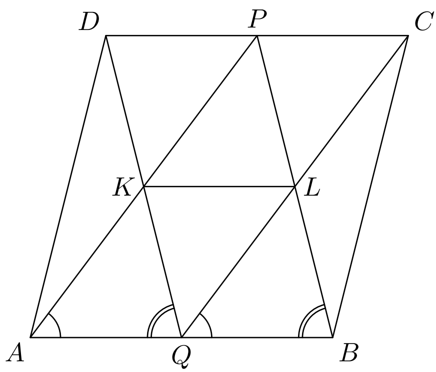
$$\ldots, x, y, z, y, z, \ldots, y, z, x, \ldots.$$

Stosując odpowiednią liczbę razy opreację nr 2, otrzymamy

$$\ldots, y, z, y, z, \ldots, y, z, x, x, \ldots.$$

Teraz wystarczy zastosować operację nr 1. □

B1. Niech K będzie punktem przecięcia odcinków AP i DQ, natomiast L - odcinków BP i CQ. Trójkąty AKQ i QLB na mocy cechy (k, b, k) są podobne do trójkąta APB w skali $\frac{1}{2}$. W takim razie $KL \parallel AB$ i $KL = \frac{1}{2}AB$. W analogiczny sposób dowodzimy, że $KL \parallel DC$ i $KL = \frac{1}{2}DC$. Czworokąt $ABCD$ ma więc parę boków równych i równoległych, zatem jest równoległobokiem. □



B2. Zachodzą następujące równości:

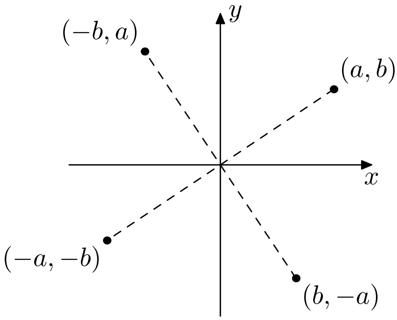
$$\begin{aligned}
\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n} = \underbrace{1111\ldots11}_{2n}+\underbrace{11\ldots1}_{n} &= \frac{10^{2n}-1}{9}+\frac{10^n-1}{9}\\
&= \frac{(10^n-1)(10^n+1)}{9}+\frac{10^n-1}{9} = \frac{(10^n-1)(10^n+2)}{9}\\
&= \frac{10^n-1}{3}\cdot\frac{10^n+2}{3} = \underbrace{33\ldots3}_{n}\cdot\underbrace{33\ldots3}_{n-1}4,
\end{aligned}$$

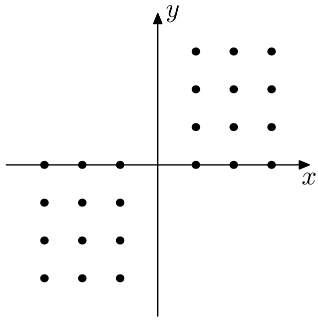
co kończy dowód. □

B3. Wykażemy, że szukaną liczbą jest $m = 2n^2 + 2n + 1$. Jest to więcej niż połowa elementów zbioru A. Zatem jeśli podzielić zbiór A na czwórki postaci

$$\big\{(a,b),(b,-a),(-a,-b),(-b,a)\big\}$$

(rysunek po lewej stronie), to na mocy zasady szufladkowej, w przynajmniej jednej z czwórek znajdą się przynajmniej trzy punkty. Pewne dwa spośród tych trzech punktów dadzą nam kąt prosty o wierzchołku O.





Z drugiej strony, w zbiorze

$$\big\{(x,y) : 1 \leqslant x \leqslant n,\ 0 \leqslant y \leqslant n\big\} \cup \big\{(x,y) : -n \leqslant x \leqslant -1,\ -n \leqslant y \leqslant 0\big\}$$

(rysunek dla $n = 3$ po prawej stronie) jest $2n^2 + 2n$ punktów i żadne dwa z nich nie wyznaczają kąta prostego o wierzchołku O.

B4. Korzystając z nierówności $\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$ oraz warunku trójkąta, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
a^3+b^3+c^3 &= (a+b-c)\frac{a^2+b^2}{2}+(b+c-a)\frac{b^2+c^2}{2}+(c+a-b)\frac{c^2+a^2}{2}\\
&\geqslant (a+b-c)ab+(b+c-a)bc+(c+a-b)ca\\
&= a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-3abc,
\end{aligned}$$

co należało wykazać. □

B5. Niech $k > 0$ będzie liczbą całkowitą oraz niech $n = |P(k)| \neq 0$. Oczywiście $n \mid P(k)$, więc także $n \mid P(k+n)$. Z warunków zadania $k + n \geqslant 2n$, równoważnie $k \geqslant n = |P(k)|$. Zatem $|P(k)| \leqslant k$ dla wszystkich całkowitych dodatnich k. Jedynymi niestałymi wielomianami posiadającymi tę własność są $P(x) = x$ oraz $P(x) = -x$. Łatwo sprawdzić, że obydwa spełniają warunki zadania.

C1. Wstawiając $-x$ w miejsce x, otrzymamy równość $-xf(-x)+f(x) = 1$. Mnożąc równość z zadania obustronnie przez x, otrzymamy $x^2 f(x) + xf(-x) = x$. Dodając do siebie ostatnie dwie równości, dostajemy $f(x) + x^2 f(x) = x + 1$, co prowadzi do $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Bezpośrednio sprawdzmy, że funkcja ta spełnia warunki zadania.

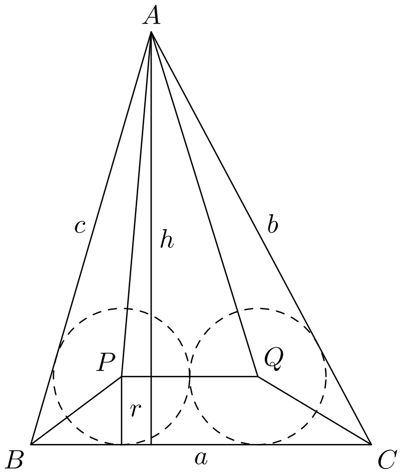
C2. Niech B będzie dowolnym miastem. Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ zbiór tych miast, z których drogi prowadzą do B, a przez $\mathcal{C}$ zbiór tych miast, do których prowadzą drogi z B. Z warunków zadania wynika, że zbiory $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są niepuste, rozłączne oraz ich suma zawiera wszystkie miasta oprócz B. Ponieważ można dojechać z każdego miasta do każdego, musi istnieć bezpośrednia droga z pewnego miasta C ze zbioru $\mathcal{C}$ do pewnego miasta A ze zbioru $\mathcal{A}$. Wtedy A, B, C jest trójkątem. $\square$

C3. Ponieważ $a \mid \frac{n}{a} + \frac{n}{b}$, to tym bardziej $a \mid \frac{nb}{a} + n$. Z faktu $a \mid n$, mamy $a \mid \frac{nb}{a}$, równoważnie $a^3 \mid abn$. Analogicznie otrzymujemy podzielność $b^3 \mid abn$. Stąd

$$\mathtt{NWW}(a^3, b^3) \mid abn, \quad \text{równoważnie} \quad \frac{(\mathtt{NWW}(a,b))^3}{ab} \mid n.$$

Teraz już łatwo otrzymać tezę, korzystając z tożsamości $ab = \mathtt{NWD}(a,b) \cdot \mathtt{NWW}(a,b)$. $\square$

C4. Niech P i Q będą środkami okręgów odpowiednio o_1 i o_2. Oznaczmy ich promień przez r, a wysokość trójkąta ABC opuszczoną na bok BC przez h. Przyjmijmy także $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.



Zachodzi następująca równość pól:

$$P_{ABC} = P_{BPQC} + P_{BPA} + P_{CQA} + P_{PQA}.$$

Stąd

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(a+2r)r + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2} \cdot 2r(h-r),$$

co po przekształceniach daje

$$r = \frac{ah}{a+b+c+2h} = \frac{a \cdot \frac{1}{3}(a+b+c)}{a+b+c+\frac{2}{3}(a+b+c)} = \frac{1}{5}a,$$

co należało wykazać. $\square$

C5. Prosta indukcja pokazuje, że $0 < a_n < 1$ dla wszystkich n. Zależność rekurencyjna z zadania jest równoważna równości

$$a_k^2 = \frac{\frac{1}{a_{k+1}} - 1}{\frac{1}{a_k} - 1}.$$

Mnożąc ją stronami dla $k = 1, 2, \ldots, n$, otrzymamy

$$(a_1 \ldots a_n)^2 = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} - 1}{\frac{1}{a_1} - 1} = \frac{1}{a_{n+1}} - 1.$$

Niech $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = (a_1 a_2 \ldots a_n)^2$. Na mocy warunków zadania, dla $n \geqslant 2$

$$b_{n-1} + \frac{1}{b_{n-1}} = \frac{a_n}{1 - a_n} + \frac{1 - a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n^2 - a_n} - 2 = \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} - 1} - 2 = b_n - 2.$$

Stąd $b_n > b_{n-1} + 2$. Rozpoczynając od $b_1 = 4$, otrzymamy indukcyjnie $b_n > 2n$, co jest równoważne tezie zadania. $\square$