ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

VI Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2015r.

Organizacja konkursu

Szósta edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2014/2015. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Odbywały się w okresie od stycznia do marca 2015r.

Jak co roku, organizację Ligi wsparła Poznańska Fundacja Matematyczna, a także Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zaintersowanymi. W szkołach wywieszone zostały plakaty informujące o konkursie. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlm.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLM na Facebooku.

W konkursie wzięło udział 27 uczniów szkół średnich, w większości z Poznania (16 uczestników) i Leszna (7 uczestników). Uczniowie reprezentowali również Grodzisk WLKP, Jarocin, Mogilno i Ostrów WLKP (po jednym uczestniku).

Uczniowie rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia 2015r., zestaw B do końca lutego 2015r., zestaw C do końca marca 2015r. Każdy zestaw liczył po 5 zadań z różnych działów matematyki. Rozwiązania zadań oceniane były przez Komisję WLM. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać jeden *duży* punkt i od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów, na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie VI WLM odbyło się 19 czerwca 2015r. na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Uczestnicy, którzy wypadli najlepiej, otrzymali nagrody książkowe. Wszyscy obecni na zakończeniu mogli wysłuchać wykładu Jędrzeja Garnka (studenta IV roku matematyki) pod tytułem *Fraktale, metryki i twierdzenie Banacha.*

Komisja WLM

- Przewodniczący:
  prof. dr hab. Krzysztof Pawałowski.
- Zespół oceniający prace uczestników:
  dr Małgorzata Bednarska–Bzdęga, dr Bartłomiej Bzdęga, Jędrzej Garnek.
- Zespół przygotowujący zadania konkursowe:
  dr Bartłomiej Bzdęga, Jędrzej Garnek, Łukasz Nizio, Piotr Mizerka, Sylwester Swat.

Wyniki konkursu

Nagrody I stopnia

Mieczysław Krawiarz 15 (145)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wojciech Wawrów 15 (143)
Uczeń 2 klasy Liceum Ogólnokształcącego im. św. Marii Magdaleny w Poznaniu.

Wojciech Chojnacki 15 (138)
Uczeń 3 klasy Liceum Ogólnokształcącego im. św. Marii Magdaleny w Poznaniu.

Nagroda II stopnia

Mikołaj Rakowski 12 (112)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Tomasz Stempniak 10 (96)
Uczeń 2 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Ostrowie Wielkopolskim.

Bartosz Kopras 10 (94)
Uczeń 3 klasy XVI Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Kamil Piechowiak 10 (91)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Konrad Hreczycho 9 (85)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Tomasz Kałużny 9 (83)
Uczeń 3 klasy XVI Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyróżnienia

Aleksandra Banach 7 (66)
Uczennica 3 klasy Liceum Ogólnokształcącego w Grodzisku Wielkopolskim.

Michał Budzisz 6 (53)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Agata Chlebowska 5 (45)
Uczennica 1 klasy Zespołu Szkół Ponadgimnazjalnych w Jarocinie.

Kacper Bem 4 (47)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Treści zadań

Zestaw A

A1. Każdemu wierzchołkowi dwudziestościanu foremnego przypisano jedną liczbę ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 6\}$. Na każdej ścianie zapisano sumę liczb przypisanych jej wierzchołkom. Udowodnić, że na pewnych dwóch ścianach zapisano taką samą liczbę.

A2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Dwusieczne kątów ABC i BCD przecinają się w punkcie P leżącym na odcinku AD. Wykazać, że P jest środkiem odcinka AD.

A3. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_k$ będą nieujemne oraz $s_k = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Wykazać, że

$$\sqrt[n]{(s_1+1)(s_2+1)\ldots(s_n+1)} \leqslant (x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1).$$

A4. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą, która nie jest dzielnikiem żadnej z liczb całkowitych a, b. Liczby a^2+b^2 i a^3+b^3 dają resztę 1 z dzielenia przez p. Dowieść, że $a+b+2$ dzieli się przez p.

A5. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n, dla których istnieje taki wielomian n-tego stopnia $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że wielomian $Q(x) = P(x^2+1)$ jest podzielny przez $P(x)$.

Zestaw B

B1. W czworokącie $ABCD$ kąty przy wierzchołkach B i C są proste. Punkt P leży na odcinku BC. Rozstrzygnąć, czy jest możliwe, by trójkąty ABP, CDP i DAP miały jednakowe pola.

B2. Niech k i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi spełniającymi warunek $k \leqslant n \leqslant k^2$. Udowodnić, że wśród liczb

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{k+2} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2k-1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2k} \right\rfloor$$

jest przynajmniej jedna liczba nieparzysta.
(Uwaga: $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.)

B3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ciąg $(a_1, a_2, \ldots)$ liczb wymiernych dodatnich, że każda liczba wymierna dodatnia występuje w nim dokładnie raz, a ponadto na_n jest liczbą naturalną dla wszystkich $n \geqslant 1$.

B4. Wyróżniono k spośród 2^n podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, przy czym $k < 2^n$. Dla każdych dwóch wyróżnionych podzbiorów A i B, podzbiory $A \cup B$ i $A \setminus B$ również są wyróżnione. W zależności od n wyznaczyć największą liczbę k, dla której powyższa sytuacja jest możliwa.

B5. Dany jest czworościan $ABCD$. Oznaczmy przez I środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt K leży na krawędzi AD, przy czym $\frac{AK}{KD} = \frac{AB+BC+CA}{BC}$. Punkt L jest punktem przecięcia prostej AI z bokiem BC. Odcinki KL i DI przecinają się w punkcie P. Dowieść, że $IP = DP$.

Zestaw C

C1. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będą różnymi liczbami pierwszymi i niech zachodzi równość

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} = \frac{a}{p_1 p_2 \ldots p_n}.$$

Udowodnić, że ułamek znajdujący się po prawej stronie tej równości jest nieskracalny.

C2. Na płaszczyźnie, lecz nie na jednej prostej, leżą odcinki AB i CD o jednakowej długości. Wykazać, że istnieje taki punkt P, że trójkąty ABP i CDP są przystające.

C3. W zależności od $n \geqslant 2$ wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą c o następującej własności: Jeśli ciągi liczb rzeczywistych dodatnich $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(y_1, \ldots, y_n)$ mają takie same wyrazy (choć niekoniecznie w tej samej kolejności), to

$$\frac{x_1}{y_1 + y_2} + \frac{x_2}{y_2 + y_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{y_{n-1} + y_n} + \frac{x_n}{y_n + y_1} \geqslant c.$$

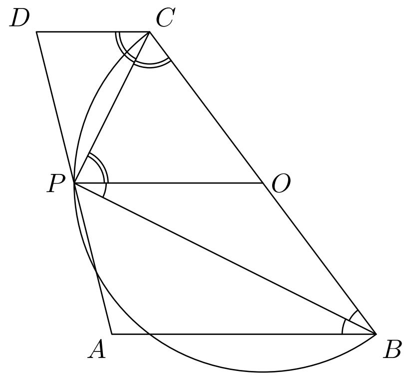
C4. Na płaszczyźnie zaznaczono $n \geqslant 2$ punktów, żadne trzy nie leżą na jednej prostej oraz odległości pomiędzy każdymi dwoma z nich są różne. Nazwijmy odcinek AB dziwnym, jeśli punkt B jest położony najbliżej punktu A ze wszystkich pozostałych zaznaczonych punktów, a punkt A jest położony najdalej od punktu B ze wszystkich zaznaczonych punktów. W zależności od n wyznaczyć największą możliwą liczbę dziwnych odcinków.

C5. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, posiadające dzielnik $d > 2$, spełniający warunek $\texttt{NWD}(n + 1, d - 2) > \sqrt{n + 1}$.

Szkice rozwiązań

A1. Na każdej ścianie zapisano liczbę ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 18\}$ (19 możliwości), a ścian jest 20. Wobec tego, na mocy zasady szufladkowej, pewne dwie zapisane liczby są jednakowe.

A2. Obliczmy najpierw



$$\sphericalangle BPC = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC - \frac{1}{2}\sphericalangle BCD = 90^\circ.$$

Zatem środek odcinka BC, nazwijmy go O, jest także środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCP. Stąd

$$\sphericalangle OPB = \sphericalangle OBP = \sphericalangle ABP,$$

więc $OP \parallel CD \parallel AB$. Na mocy twierdzenia Talesa

$$\frac{DP}{PA} = \frac{CO}{OB} = 1,$$

co kończy dowód.

A3. Niech $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Jest jasne, że $s_k + 1 \leqslant M + 1$, zatem

$$\sqrt[n]{(s_1+1)\ldots(x_n+1)} \leqslant \sqrt[n]{(M+1)^n} = M + 1 \leqslant (x_1+1)\ldots(x_n+1),$$

gdyż czynniki ostatniego iloczynu są nie mniejsze od 1, a jednym z nich jest $M + 1$.

A4. Mamy $(a^3+b^3)^2 \equiv 1 \equiv (a^2+b^2)^3 \pmod{p}$, co po uproszczeniu daje

$$2a^3b^3 \equiv 3a^2b^2(a^2+b^2) \equiv 3a^2b^2 \pmod{p}.$$

Ponieważ a i b są względnie pierwsze z p, kongruencję można podzielić obustronnie przez a^2b^2. Otrzymujemy $2ab \equiv 3 \pmod{p}$. W takim razie

$$2 \equiv 2(a^3+b^3) = (a+b)\big(2(a^2+b^2) - 2ab\big) \equiv (a+b)(2-3) \equiv -(a+b) \pmod{p},$$

co jest równoważne tezie.

A5. Dla parzystych n taki wielomian istnieje. Niech $n = 2k$ oraz $P(x) = (x^2 - x + 1)^k$. Wielomian ten ma stopień n, a ponadto dzieli $Q(x)$, gdyż

$$Q(x) = \big((x^2+1)^2 - (x^2+1) + 1\big)^k = (x^4 - x^2 + 1)^k$$
$$= (x^2 - x + 1)^k (x^2 + x + 1)^k = P(x)(x^2 + x + 1)^k.$$

Dla nieparzystych n odpowiedź jest negatywna, co udowodnimy nie wprost. Załóżmy więc, że wielomian $Q(x)$ jest podzielny przez $P(x)$. Wielomian $P(x)$ ma nieparzysty stopień, zatem posiada pierwiastek rzeczywisty, powiedzmy x_1. Niech

$$x_{k+1} = x_k^2 + 1 \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Jest jasne, że $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$. Udowodnimy indukcyjnie, że $P(x_k) = 0$ dla wszystkich $k = 1, 2, \ldots$. Będzie to poszukiwana sprzeczność, gdyż wielomian nie może mieć nieskończenie wiele pierwiastków.

Dla $k = 1$ teza zachodzi. Zakładamy indukcyjnie, że $P(x_k) = 0$ dla pewnego $k \geqslant 1$. Wówczas również $Q(x_k) = 0$, gdyż $P(x)$ jest dzielnikiem $Q(x)$. Stąd

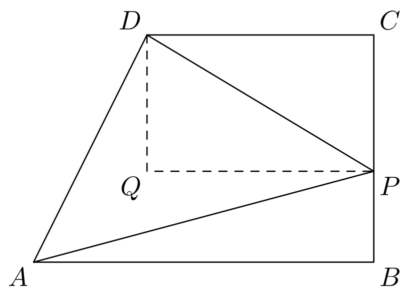
$$P(x_{k+1}) = P(x_k^2 + 1) = Q(x_k) = 0,$$

co kończy krok indukcyjny.

B1. Wykażemy, że to nie jest możliwe. Załóżmy bez straty ogólności, że $AB \geqslant CD$. Niech Q będzie takim punktem, żeby $CDQP$ był prostokątem. Przez $[\mathcal{X}]$ oznaczmy pole figury $\mathcal{X}$. Wówczas

$$[CDP] = [PDQ] \leqslant [ADP],$$

przy czym równość zachodzi tylko dla $Q = A$. Jednak wtedy $[ABP] = 0$.



B2. Jest jasne, że jeśli $0 \leqslant x - y \leqslant 1$, to $\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$. Dla $a \geqslant k$ mamy

$$0 < \frac{n}{a} - \frac{n}{a+1} = \frac{n}{a(a+1)} < \frac{n}{k^2} \leqslant 1,$$

zatem w danym ciągu występują wszystkie liczby naturalne od $\lfloor n/k \rfloor$ do $\lfloor n/(2k) \rfloor$ włącznie. Pozostaje jeszcze zauważyć, że

$$\left\lfloor \frac{n}{2k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor n/k \rfloor}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor,$$

gdyż $\lfloor n/k \rfloor \geqslant 1$, bo $n \geqslant k$. Stąd w zadanym ciągu występują przynajmniej dwie kolejne liczby naturalne. Wśród nich jest liczba nieparzysta.

B3. Taki ciąg istnieje. Zaczynając od $a_1 = 1 = \frac{1}{1}$, skonstruujemy go rekurencyjnie. Mając $a_1, \ldots, a_{n-1}$, wybieramy dowolne $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ spełniające warunki:

(1) $a_n \neq a_1, \ldots, a_{n-1}$; (2) $q_n \mid n$; (3) $p_n + q_n$ jest jak najmniesza.

Warunek (1) zapewnia, że każda liczba wymierna dodatnia wystąpi w tym ciągu co najwyżej raz; warunek (2), że na_n jest liczbą naturalną dla wszystkich n. Wystarczy zatem wykazać, że każda liczba wymierna dodatnia wystąpi w tym ciągu.

Ułamek $\frac{p}{q}$ spełnia warunek (2) dla wszystkich n będących wielokrotnościami q. Ponieważ istnieje tylko skończenie wiele ułamków o sumie licznika i mianownika nie przekraczającej $p + q$, warunki (1) i (3) gwarantują, że któryś z powyższych wyrazów ciągu będzie równy $\frac{p}{q}$.

B4. Niech $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Udowodnimy, że szukaną liczbą jest $k = 2^{n-1}$.

Jeśli wyróżnić wszystkie podzbiory zbioru $X \setminus \{n\}$, których jest 2^{n-1}, to warunki zadania będą spełnione. Pozostaje zatem wykazać, że jeśli liczba wyróżnionych podzbiorów przekracza 2^{n-1}, to wszystkie zbiory są wyróżnione.

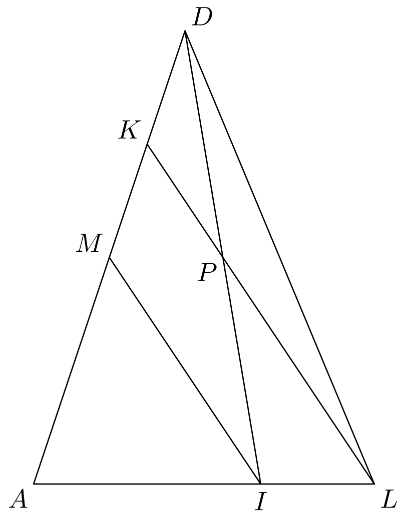
Wybierzmy dowolny $x \in X$. Zbiory wyróżnione dzielimy na dwie klasy:

$$\text{postaci } A_1 \text{ oraz postaci } A_2 \cup \{x\}, \quad \text{gdzie } A_1, A_2 \subset X \setminus \{x\}.$$

Ponieważ liczba wyróżnionych podzbiorów jest większa od liczby podzbiorów $X \setminus \{x\}$, dla pewnego $A \subset X \setminus \{x\}$ zbiory A i $A \cup \{x\}$ są obydwa wyróżnione. Zatem także $\{x\} = (A \cup \{x\}) \setminus A$ jest wyróżniony. Stąd wszystkie jednoelementowe podzbiory X są wyróżnione, co prowadzi do wniosku, że wyróżniono wszystkie niepuste podzbiory. Zbiór pusty również jest wyróżniony, gdyż $\emptyset = X \setminus X$.

B5. Niech r oznacza promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a h - wysokość opuszczoną z wierzchołka A. Wówczas na mocy twierdzenia Talesa

$$\frac{AL}{IL} = \frac{h}{r} = \frac{AB + BC + CA}{BC} = \frac{AK}{KD}.$$



Dalsza część rozwiązania odbywa się na płaszczyźnie ADL. Niech M będzie takim punktem na odcinku AK, że $IM \parallel KL$. Stosując dwukrotnie twierdzenie Talesa, a następnie wcześniej udowodnioną równość, otrzymamy

$$\frac{IP}{PD} = \frac{MK}{KD} = \frac{\frac{IL}{AL} \cdot AK}{KD} = \frac{\frac{KD}{AK} \cdot AK}{KD} = 1,$$

co kończy dowód.

C1. Ponieważ liczby $p_1, p_2, \ldots, p_n$ są pierwsze, wystarczy wykazać, że liczba a nie jest podzielna przez żadną z nich. Niech

$$a_i = \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{p_i} \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

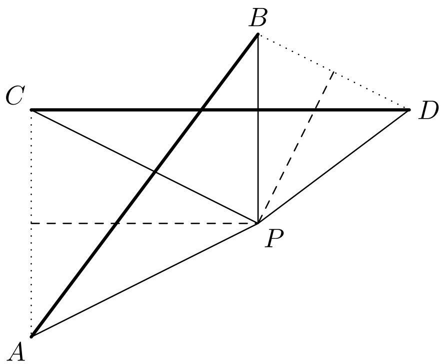
Wtedy $\frac{1}{p_i} = \frac{a_i}{p_1 p_2 \ldots p_n}$, zatem

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{p_1 p_2 \ldots p_n}.$$

Stąd wnioskujemy, że $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Pozostaje zauważyć, że $p_i \mid a_j$ dla $j \neq i$, ale $p_i \nmid a_i$. Wobec tego $p_i \nmid a$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, co kończy dowód.

C2. Jeśli $AC \parallel BD$ i $AD \parallel BC$, to $ACBD$ jest równoległobokiem o przekątnych tej samej długości, więc jest prostokątem. Wtedy jako punkt P można wziąć środek boku BC.

W przeciwnym wypadku można bez straty ogólności założyć, że $AC \nparallel BD$. Wówczas symetralne odcinków AC i BD przecinają się w pewnym punkcie. Udowodnimy, że jest to szukany punkt P.



Mamy $AP = CP$ i $BP = DP$, więc trójkąty ABP i CDP są przystające na mocy cechy (b,b,b).

Pozostaje zauważyć, że tak określony punkt P nie leży na odcinkach AB i CD.

C3. Udowodnimy, że niezależnie od n mamy $c = 1$. Jest jasne, że

$$\frac{x_1}{y_1 + y_2} + \ldots + \frac{x_n}{y_n + y_1} \geqslant \frac{x_1}{y_1 + \ldots + y_n} + \ldots + \frac{x_n}{y_1 + \ldots + y_n} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{y_1 + \ldots + y_n} = 1.$$

Rozważmy teraz $x_i = y_i = a^i$ dla $i = 1, \ldots, n$, gdzie $a = n/\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{y_1 + y_2} + \ldots + \frac{x_n}{y_n + y_1} &= \frac{a}{a + a^2} + \frac{a^2}{a^2 + a^3} + \ldots + \frac{a^{n-1}}{a^{n-1} + a^n} + \frac{a^n}{a^n + a} \\ &= \frac{n-1}{a+1} + \frac{a^n}{a^n + a} < \frac{n}{a} + 1 = 1 + \varepsilon.\end{aligned}$$

Liczba ta może być dowolnie bliska 1, gdyż ε możemy wziąc dowolnie małe.

C4. Dla dowolnego $n \geqslant 2$ istnieje rozmieszczenie punktów z przynajmniej jednym dziwnym odcinkiem: wystarczy najpierw wybrać $n-1$ punktów zgodnie z warunkami zadania, a następnie dodać n-ty punkt X wystarczająco daleko od nich. Wówczas punkt X i punkt położony najbliżej niego są końcami dziwnego odcinka.

Teraz udowodnimy nie wprost, że liczba dziwnych odcinków nie przekracza 1. Załóżmy zatem, że istnieją przynajmniej dwa dziwne odcinki. Należy tu rozważyć dwa przypadki.

1. Odcinki AB i BC są dziwne. Niech A będzie najbliższy dla B. Wtedy C jest najdalszy dla B, B jest najdalszy dla A oraz B jest najbliższy dla C. Otrzymujemy stąd $AB < BC < CA < AB$, sprzeczność.

2. Odcinki AB i CD są dziwne. Niech A będzie najbliższy dla B, natomiast B najdalszy dla A. Ponadto niech C będzie najbliższy dla D oraz D najdalszy dla C. Wtedy $CD < AD < AB < BC < CD$, sprzeczność.

Podsumowując, największa liczba dziwnych odcinków, niezależnie od n, wynosi 1.

C5. Niech $a = \mathtt{NWD}(n+1, d-2)$ oraz $n = dm$. Ponieważ $d-2 \geqslant a > \sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, otrzymujemy $m < \sqrt{n}$, więc $d \geqslant m+3$.

Z podzielności $a \mid n+1-m(d-2) = 2m+1$ wnioskujemy, że $2m+1 \geqslant a > \sqrt{n+1}$. Po podniesieniu obu stron do kwadratu, otrzymamy

$$4m^2 + 4m + 1 > n + 1 = md + 1,$$

z czego wynika, że $d \leqslant 4m+3$.

Zachodzi również podzielność $a \mid 2m+1-(d-2) = 2m-d+3$. Udowodnimy nie wprost, że $2m-d+3 = 0$. Istotnie, jeśli $2m-d+3 \neq 0$, to

$$|2m-d+3| \geqslant a > \sqrt{n+1} = \sqrt{md+1},$$

co po ubustronnym podniesieniu do kwadratu i uporządkowaniu daje

$$(d-m)(d-4m-6) + 8 > 0.$$

Jednak ze wcześniejszych rozważań wynika, że $d-m \geqslant 3$ oraz $d-4m-6 \leqslant -3$, więc powyższa nierówność nie może mieć miejsca.

Udowodniliśmy zatem, że $d = 2m+3$, więc $n = m(2m+3)$. Bezpośredni rachunek pokazuje, że wszystkie te liczby dla całkowitych $m \geqslant 1$ spełniają warunki zadania:

$$\begin{aligned}\mathtt{NWD}(n+1, d-2) &= \mathtt{NWD}(2m^2+3m+1, 2m+1) = \mathtt{NWD}\big((2m+1)(m+1), 2m+1\big)\\ &= 2m+1 = \sqrt{4m^2+4m+1} > \sqrt{2m^2+3m+1} = \sqrt{n+1}.\end{aligned}$$