ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

VII Wielkopolska
Liga Matematyczna

Poznań 2016r.

Organizacja konkursu

Siódma edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2015/2016. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Odbywały się w okresie od stycznia do marca 2016r.

Jak co roku, organizację ligi wsparła Poznańska Fundacja Matematyczna, a także Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zaintersowanymi. W szkołach wywieszone zostały plakaty informujące o konkursie. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlm.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLM na Facebooku.

W konkursie wzięło udział 22 uczniów szkół średnich oraz jeden gimnazjalista. Przeważająca część, bo aż 18 uczestników, pochodziła ze szkół poznańskich. Uczniowie reprezentowali również Środę Wielkopolską (2 uczestników) oraz Jarocin, Piłę i Rokietnicę (po jednym).

Uczestnicy rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia 2016r., zestaw B do końca lutego 2016r., zestaw C do końca marca 2016r. Każdy zestaw liczył po 5 zadań z różnych działów matematyki. Rozwiązania zadań oceniane były przez Komisję WLM. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać jeden *duży* punkt i od 0 do 10 *małych* punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów, na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie VII WLM odbyło się 11 czerwca 2016r. na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Uczestnicy, którzy wypadli najlepiej, otrzymali nagrody książkowe. Wszyscy obecni na zakończeniu mogli wysłuchać wykładu pod tytułem *Spacery na świeżym powietrzu*, który wygłosił profesor Piotr Śniady.

Komisja WLM

- Członkowie komisji:
  dr Bartłomiej Bzdęga (przewodniczący), dr Małgorzata Bednarska-Bzdęga, mgr Jędrzej Garnek.

- Zespół przygotowujący zadania konkursowe:
  dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Jędrzej Garnek, mgr Łukasz Nizio, Mieczysław Krawiarz, Piotr Mizerka, Sylwester Swat.

Wyniki konkursu

Nagroda I stopnia

Wojciech Wawrów 15 (144)
Uczeń 3 klasy Liceum Ogólnokształcącego św. Marii Magdaleny w Poznaniu.

Nagrody II stopnia

Patryk Matusiak 9 (89)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Kacper Bem 8 (81)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Kamil Piechowiak 8 (76)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Michał Urbański 6 (53)
Uczeń 2 klasy XVI Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Piotr Góreczny 6 (46)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Cezary Botta 5 (44)
Uczeń 1 klasy Gimnazjum im. Noblistów w Rokietnicy.

Paulina Romanowska 4 (43)
Uczennica 2 klasy Liceum Ogólnokształcącego im. św. J. Bosko w Pile.

Wyróżnienia

Mikołaj Rakowski 3 (38)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Tomasz Wiśniewski 3 (32)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Agata Chlebowska 3 (29)
Uczennica 2 klasy Zespołu Szkół Ponadgimnazjalnych w Jarocinie.

Piotr Kamiński 3 (27)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Treści zadań

Zestaw A

A1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} |x-y| &= z^7, \\ |y-z| &= x^7, \\ |z-x| &= y^7 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z.

A2. Liczby a i b są całkowite dodatnie, ponadto $a^3 + b^3 = p^n$ dla pewnej liczby pierwszej p i liczby naturalnej n. Udowodnić, że $p = 2$ lub $p = 3$.

A3. Nazwijmy *grubym* prostokąt o bokach x i y, spełniających warunek $\frac{1}{2}x < y < 2x$. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których z kafelków o wymiarach

$$1 \times 1, \quad 1 \times 2, \quad \ldots, \quad 1 \times n$$

można ułożyć gruby prostokąt, przy czym każdy z tych kafelków powienien być użyty dokładnie jeden raz.

A4. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ciąg $(a_1, a_2, \ldots)$ liczb nieujemnych, że dla wszystkich $n \geqslant 2$ zachodzą nierówności $a_{n+1} < a_n$ oraz $s_{n+1} > s_n$, gdzie s_n jest średnią arytmetyczną n początkowych wyrazów ciągu (a).

A5. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ zachodzą następujące równości:

$$AB = BC = CD, \qquad AE = EB = BD, \qquad AC = CE = ED.$$

Wyznaczyć miary kątów tego pięciokąta.

Zestaw B

B1. Niech A_1, B_1, C_1 będą środkami boków trójkąta ABC, leżących naprzeciw wierzchołków odpowiednio A, B, C. Dowieść, że z odcinków długości AA_1, BB_1, CC_1 można zbudować trójkąt.

B2. Na kole (z brzegiem) o promieniu 1 znajduje się pchła. Wyznaczyć wszystkie liczby dodatnie d, dla których pchła potrafi dostać się z każdego punktu koła na każdy, wykonując pewną liczbę skoków o długości równej d i nie opuszczając przy tym koła.

B3. Znaleźć wszystkie pary liczb naturalnych (m,n), dla których $m^2n \mid m^4+m+n$.

B4. W równoległoboku $ABCD$ kąt przy wierzchołku A ma miarę $\alpha < 60^\circ$. Punkt $P \neq D$ spełnia warunek $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB = \alpha$. Wykazać, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$.

B5. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi, przy czym $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Połóżmy $x_0 = x_n$ i $x_{n+1} = x_1$ oraz $y_i = \frac{x_i+x_{i-1}}{2} \cdot \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Dowieść, że

$$8\overline{y} + 4 \geqslant 11\overline{x},$$

gdzie $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ i $\overline{y} = \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$.

Zestaw C

C1. Niech $a, k, l \geqslant 2$ będą liczbami naturalnymi. Udowodnić, że liczby

$$M = 1 + a^k + a^{2k} + \ldots + a^{(l-1)k} \quad \text{i} \quad N = 1 + a^l + a^{2l} + \ldots + a^{(k-1)l}$$

posiadają wspólny dzielnik większy od 1.

C2. Wykazać, że dla $n \geqslant 2$ wszystkie współczynniki wielomianu

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{1}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\ldots\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

są mniejsze od n.

C3. W trójkącie ostrokątnym ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę większą niż 45°. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i AC, przy czym zachodzi równość $AK = AL$. Udowodnić, że $AB^2 + AC^2 < (BL + CK)^2$.

C4. Dla ustalonej liczby rzeczywistej $c > 0$ i liczby naturalnej $a_1 \geqslant 1$ określamy następujący ciąg $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$: dla $n > 1$ liczba a_n jest najmniejszą wielokrotnością n nie mniejszą niż ca_{n-1}. Wyznaczyć wszystkie takie $c > 0$, że niezależnie od wartości a_1, dla pewnego m zachodzi równość $a_m = m$.

C5. Wszystkie ściany pewnego wielościanu wypukłego są trójkątami. Ponadto w każdym jego wierzchołku, za wyjątkiem dokładnie dwóch, spotyka się parzysta liczba ścian. Dowieść, że te wyjątkowe wierzchołki nie są końcami jednej krawędzi.

Szkice rozwiązań

A1. Zauważmy, że $z^7 = |x-y| \geqslant 0$, co daje $z \geqslant 0$; analogicznie $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$. Rozważmy przypadek, w którym $x \leqslant y \leqslant z$. Wówczas

$$y^7 - z^7 = |z-x| - |x-y| = (z-x) - (y-x) = z-y,$$

co prowadzi do $y = z$, gdyż w przeciwnym razie końce równości miałyby różne znaki. Wtedy $x = 0$ oraz $z^7 = z$, więc $z \in \{0,1\}$.
Pozostałe przypadki są analogiczne ze względu na symetrię zadanego układu. Otrzymaliśmy następujące cztery trójki (x,y,z):

$$(0,0,0), \quad (1,1,0), \quad (1,0,1), \quad (0,1,1).$$

Sprawdzamy, że każda z nich spełnia układ.

A2. Niech $d = \mathtt{NWD}(a,b)$. Jeśli $d > 1$, to można zapisać $a = da_1$, $b = db_1$. Wtedy

$$a_1^3 + b_1^3 = \frac{p^n}{d^3} = p^{n_1},$$

gdyż aby d^3 dzieliło p^n, liczba d musi być potęgą p. Powyższe rozumowanie dowodzi, że możemy rozważać jedynie względnie pierwsze a i b. Niech zatem $d = 1$.
Mamy $p^n = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, więc $a + b = p^k$ i $a^2 - ab + b^2 = p^l$ dla pewnych naturalnych $k \geqslant 1$ i $l \geqslant 0$. Jeśli $l = 0$, to $a = b = 1$ i $p = 2$. W przeciwnym razie $p \mid a^2 - ab + b^2$ oraz $p \mid a + b$. Zatem liczba

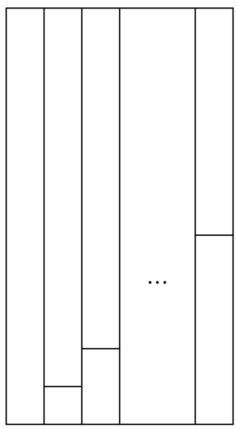
$$(a+b)^2 - (a^2 - ab + b^2) = 3ab$$

jest podzielna przez p. Wykażemy, że $p \nmid a$ i $p \nmid b$, co będzie prowadzić do wniosku, że $p = 3$. Istotnie, podzielności $p \mid a$ i $p \mid b$ są równoważne, gdyż $p \mid a + b$. Jeśli obie zachodzą, to $d \geqslant p > 1$ wbrew założeniom.

A3. Pole takiego prostokąta wynosi

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

a jeden z boków ma długość przynajmniej n. Wobec tego drugi bok ma długość co najwyżej $\frac{n+1}{2}$. W przypadku n parzystych długość ta wynosi najwyżej $\frac{n}{2}$, gdyż jest liczbą naturalną. Zatem dla n parzystych zbudowany prostokąt nie może być gruby.
Na rysunku obok przedstawiamy konstrukcję grubego prostokąta dla n nieparzystych. Kafelek po lewej stronie ma wymiary $1 \times n$, a dwa kafelki z prawej $1 \times \frac{n+1}{2}$ i $1 \times \frac{n-1}{2}$. Zbudowany prostokąt $\frac{n+1}{2} \times n$ jest gruby.
Odpowiedzią są wszystkie nieparzyste liczby naturalne.



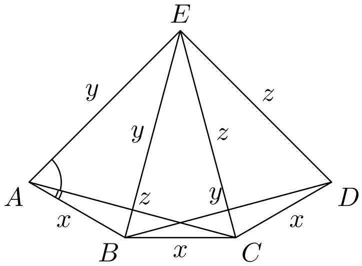
A4. Takie ciągi istnieją, o czym świadczy poniższy przykład. Niech $a_1 = 0$ oraz $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ dla $n \geqslant 2$. Wtedy oczywiście $a_2 > a_3 > \ldots$ oraz

$$s_n = \frac{0 + (1+\frac{1}{2}) + (1+\frac{1}{4}) + \ldots + (1+\frac{1}{2^n})}{n} = 1 - \frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}$$

dla $n \geqslant 2$, więc $s_2 < s_3 < \ldots$.

A5. Niech $x = AB$, $y = AE$, $z = AC$ oraz $\varphi = \sphericalangle BAC$, $\psi = \sphericalangle CAE$. Wówczas

$$\frac{x}{2y} = \cos(\phi+\psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi = \frac{z}{2x}\cdot\frac{y}{2z} - \sqrt{1-\frac{z^2}{4x^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{y^2}{4z^2}},$$



a po przekształceniach $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} = 5$. Podobnie dla $\sphericalangle BDC$ i $\sphericalangle BDE$, $\frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} = 5$. Odejmując te równania stronami, otrzymamy po kolejnych przekształceniach

$$\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{z^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{x^2}\right) = 0,$$

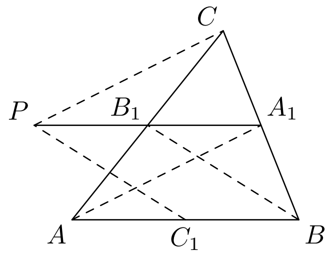
więc pewne dwie z liczb x, y, z są sobie równe.

Jeśli $x = y$, to trójkąt BCD jest równoboczny, więc punkty B i E leżą na symetralnej odcinka CD, z czego wynika, że pięciokąt $ABCDE$ nie może być wypukły. Podobną sprzeczność uzyskamy dla $x = z$. Stąd wnioskujemy, że $y = z$. Wówczas trójkąty ACE i BDE są równoboczne, a trójkąty AEB, BEC i CED są równoramienne i przystające. Stąd po prostych rachunkach wyznaczamy miary kątów pięciokąta:

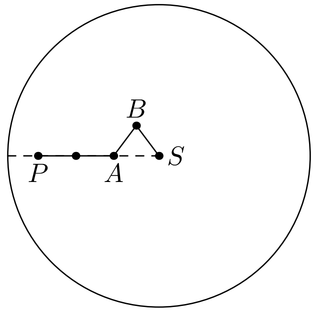
$$\sphericalangle A = 75^\circ, \quad \sphericalangle B = 150^\circ, \quad \sphericalangle C = 150^\circ, \quad \sphericalangle D = 75^\circ, \quad \sphericalangle E = 90^\circ.$$

Warto dodać, że punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami dwunastokąta foremnego, wpisanego w okrąg o środku E.

B1. Wybierzmy taki punkt P, że B_1 jest środkiem odcinka A_1P. Wówczas czworokąty B_1BC_1P i AA_1CP są równoległobokami – pierwszy z nich ma parę równych równoległych boków BC_1 i B_1P, a w drugim przekątne AC i A_1P przecinają się w połowie. Stąd $C_1P = BB_1$ i $CP = AA_1$. Zatem warunki zadania spełnia trójkąt CC_1P.



B2. Dla $d > 1$ pchła nie może wykonać żadnego skoku ze środka S koła. Wykażemy, że dla $d \leqslant 1$ pchła może się dostać z każdego punktu koła na dowolny inny.



Wystarczy udowodnić, że z każdego punktu koła pchła może dostać się do punktu S - wówczas, wykonując te same skoki, ale w odwrotnym porządku, pchła może z punktu S dostać się do dowolnego innego.

Niech pchła porusza się po odcinku łączącym jej pozycję P ze środkiem, aż znajdzie się w punkcie A, dla którego $SA < 2d$. Jest jasne, że istnieje punkt B, spełniający równość $AB = SB = d$. Punkt ten leży na danym kole, gdyż $SB = d \leqslant 1$. Z punktu A pchła może skoczyć do B, a następnie do S.

B3. Jeśli $m = 1$, to podzielność z treści zadania przybiera postać $n \mid 2 + n$ i jest spełniona tylko dla $n = 1$ lub $n = 2$. Dalej zakładamy, że $m \geqslant 2$. Mamy $m \mid n$, więc $n = md$ dla pewnego naturalnego d. Wtedy $m^2 d \mid m^3 + d + 1$, zatem $m^2 \mid d + 1$, w szczególności $d \geqslant m^2 - 1$. Stąd

$$1 \leqslant \frac{m^3 + d + 1}{m^2 d} = \frac{m}{d} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2 d} \leqslant \frac{m}{m^2 - 1} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2(m^2 - 1)} = \frac{1}{m - 1}.$$

Wnioskujemy, że $m \leqslant 2$, zatem $m = 2$ wobec poczynionych wcześniej założeń. Wtedy podzielność z zadania jest równoważna $4n \mid 18 + n$, skąd otrzymujemy $4n \leqslant 18 + n$, czyli $n \leqslant 6$. Sprawdzamy, że podzielność spełnia jedynie $n = 6$.
Podsumowując, istnieją trzy pary spełniające warunki zadania: $(1, 1)$, $(1, 2)$ i $(2, 6)$.

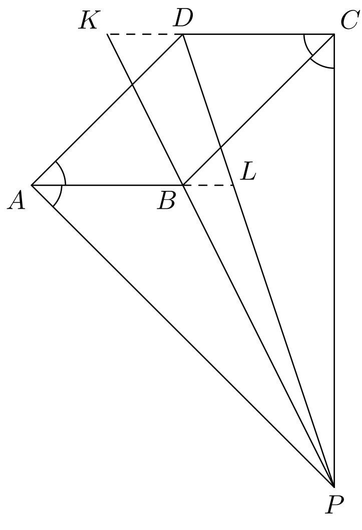
B4. Z założenia $\alpha < 60^\circ$ wynika, że

$$\sphericalangle PAD + \sphericalangle ADC + \sphericalangle DCP = 180^\circ + 3\alpha < 360^\circ,$$

zatem punkt B leży wewnątrz trójkąta APC. Niech K będzie punktem przecięcia prostych CD i PB, zaś punkt L – prostych AB i PD. Z warunków zadania AL jest dwusieczną $\sphericalangle PAD$ oraz CB jest dwusieczną $\sphericalangle KCP$. Stosując twierdzenie o dwusiecznej, twierdzenie Talesa i znów twierdzenie o dwusiecznej, otrzymamy

$$\frac{AD}{AP} = \frac{DL}{LP} = \frac{KB}{BP} = \frac{CK}{CP}.$$

Wobec tego trójkąty DAP i KCP są podobne (bkb), więc $\sphericalangle APD = \sphericalangle CPK$, a z tego już łatwo wynika teza.



B5. Oczywistą jest nierówność $(x_{i-1}+x_i+x_{i+1}-2)^2 \geqslant 0$, która po przekształceniu przybiera postać

$$x_{i-1}^2+x_i^2+x_{i+1}^2+2x_ix_{i-1}+2x_ix_{i+1}+2x_{i-1}x_{i+1}+4 \geqslant 4x_{i-1}+4x_i+4x_{i+1},$$

co dalej jest równoważne

$$x_{i-1}^2-x_i^2+x_{i+1}^2+8y_i+4 \geqslant 4x_{i-1}+4x_i+4x_{i+1}.$$

Dla $x \in [0,1]$ mamy $x^2 \leqslant x$, zatem wnioskiem z powyższej nierówności jest

$$x_{i-1}^2-x_i^2+8y_i+4 \geqslant 4x_{i-1}+4x_i+3x_{i+1}.$$

Sumując ostatnią nierówność dla $i=1,2,\ldots,n$, a następnie dzieląc obie strony przez n, otrzymamy tezę.

C1. Zauważmy, że $M(a^k-1)=N(a^l-1)=a^{kl}-1$, więc $\mathtt{NWW}(M,N) \leqslant a^{kl}-1$. Stąd

$$\mathtt{NWD}(M,N)=\frac{MN}{\mathtt{NWW}(M,N)} \geqslant \frac{MN}{a^{kl}-1}=\frac{a^{kl}-1}{(a^k-1)(a^l-1)} > \frac{a^{kl}-1}{a^{k+l}-1} \geqslant 1,$$

co kończy dowód.

C2. Suma współczynników wielomianu wynosi

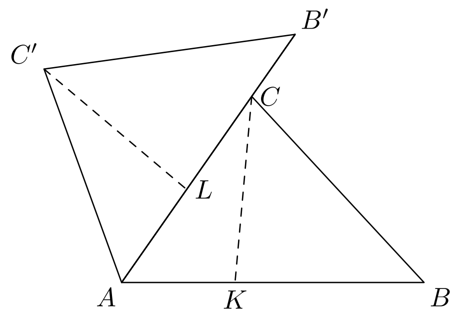
$$P(1)=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}=n+1.$$

Przy x^n jest współczynnik 1, więc suma pozostałych współczynników jest mniejsza lub równa n. Ponieważ wszystkie współczynniki są dodatnie, każdy z nich jest mniejszy od n.

C3. Obróćmy trójkąt ABC wokół punktu A o $\sphericalangle BAC$, w taki sposób, by obrazem punktu K był punkt L. Mamy $CK=C'L$. Na mocy założeń

$$90^\circ < \sphericalangle BAC' < 180^\circ,$$

zatem otrzymujemy nierówność



$$AB^2+AC^2=AB^2+AC'^2<BC'^2 \leqslant (BL+C'L)^2=(BL+CK)^2,$$

co kończy dowód.

C4. Teza jest spełniona dla wszystkich $c \in (0, \frac{1}{2}]$.
Rozważmy najpierw $c \leqslant \frac{1}{2}$. Na mocy definicji ciągu (a) mamy $a_n \geqslant ca_{n-1} > a_n - n$ dla $n \geqslant 2$. Jeśli $a_n \neq n$, to $a_n \geqslant 2n$ i tym samym

$$a_n \leqslant 2(a_n - n) < 2ca_{n-1} \leqslant a_{n-1}.$$

W takim razie gdyby nierówność $a_n \neq n$ zachodziła dla wszystkich $n \geqslant 2$, nasz ciąg byłby nieskończonym malejącym ciągiem liczb naturalnych, a to jest niemożliwe. Wobec tego $a_n = n$ dla pewnego n.
Pozostaje rozważyć $c > \frac{1}{2}$. Dla takich c skonstruujemy ciąg, który nie spełnia tezy. Niech $c = \frac{1}{2} + \varepsilon$ oraz $q_n = \frac{a_n}{n}$. Liczby q_n są całkowite dodatnie, a ponadto

$$q_n = \frac{a_n}{n} \geqslant \frac{ca_{n-1}}{n} = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) q_{n-1}.$$

Stąd dla wszystkich $n \geqslant 2$ mamy $q_n > \frac{1}{4}q_{n-1}$ oraz dla odpowiednio dużych n, powiedzmy $n > N$, zachodzi nierówność $q_n > \frac{1}{2}q_{n-1}$. Z ostatniej nierówności wynika, że jeśli $q_{n-1} > 1$, to $q_n > 1$ dla $n > N$. Wystarczy zatem tak dobrać q_1, by było $q_N > 1$. Na mocy nierówności $q_n > \frac{1}{4}q_{n-1}$, dobrym wyborem jest $q_1 = 4^N$. Wtedy dla wszystkich n zachodzi $q_n > 1$, równoważnie $a_n > n$.

C5. Przypuśćmy, że wyjątkowe wierzchołki są końcami jednej krawędzi. Usuwając tę krawędź oraz dokonując lekkiej deformacji, otrzymamy wielościan wypukły, który ma jedną ścianę czworokątną a pozostałe trójkątne, a ponadto w każdym jego wierzchołku spotyka się parzysta liczba krawędzi. Oprzemy się na następującym lemacie.

Lemat. Jeśli w każdym wierzchołku wielościanu wypukłego spotyka się parzysta liczba ścian, to można tak pokolorować jego ściany na biało i czarno, by każde dwie sąsiednie ściany (mające wspólną krawędź) były innego koloru.

Dowód lematu. Pomalujmy ściany w dowolny sposób. Wszystkie krawędzie oddzielające ściany jednakowego koloru nazwijmy czerwonymi. Jest jasne, że z każdego wierzchołka wychodzi ich parzysta (być może zerowa) liczba. Zatem jeśli pewna czerwona krawędź dochodzi do wierzchołka v_1, to wychodzi z niego przynajmniej jedna inna czerwona krawędź, powiedzmy do v_2, z którego znów wychodzi inna do v_3, i tak dalej. Wierzchołki zaczną się w końcu powtarzać, więc znajdziemy czerwony cykl.
Cykl dzieli wielościan na dwie części. Wybierzmy jedną i zmieńmy kolor każdej ze ścian tej części. Wtedy wszystkie krawędzie znalezionego cyklu przestaną być czerwone, a reszta krawędzi pozostanie bez zmian. Zachowana zostanie też własność, że w każdym wierzchołku spotyka się parzysta liczba czerwonych krawędzi.
Kontynuując to postępowanie, będziemy sukcesywnie zmniejszać liczbę czerwonych krawędzi, aż do wyzerowania jej. Wówczas otrzymamy żądane kolorowanie.

Nasz wielościan spełnia założenia lematu, zatem takie kolorowanie jest możliwe. Niech wielościan ma b białych (w tym czworokątna) i c czarnych ścian. Ponieważ każda krawędź łączy białą i czarną ścianę, liczba krawędzi białych ścian $(3b + 1)$ i liczba krawędzi czarnych ścian $(3c)$ są sobie równe – sprzeczność.