ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

VIII Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2017r.

Organizacja konkursu

Ósma edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2016/2017. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Odbywały się w okresie od stycznia do marca 2017r.

Jak co roku, organizację Ligi wsparła Poznańska Fundacja Matematyczna, a także Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zaintersowanymi. W szkołach wywieszone zostały plakaty informujące o konkursie. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlm.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLM na Facebooku.

W konkursie wzięło udział 37 uczniów szkół średnich oraz troje gimnazjalistów. Uczniowie reprezentowali Poznań (25), Leszno (6), Piłę i Szamotuły (2) oraz Gniezno, Ostrów Wielkopolski, Pleszew, Rokietnicę i Tarnowo Podgórne (1). Na uwagę zasługuje spory sukces gimnazjalistów: dwoje z nich zdobyło nagrodę drugiego stopnia.

Uczestnicy rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia, zestaw B do końca lutego, zestaw C do końca marca. Każdy zestaw liczył po 5 zadań z różnych działów matematyki. Rozwiązania zadań oceniane były przez Komisję WLM. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać jeden *duży* punkt i od 0 do 10 *małych* punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie VIII WLM odbyło się 26 maja 2017r. na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Uczestnicy, którzy wypadli najlepiej, otrzymali nagrody książkowe. Wszyscy obecni na zakończeniu mogli wysłuchać wykładu pod tytułem *Matematyka pierwszych chrześcijan*, który wygłosił dr Bartłomiej Bzdęga.

Komisja WLM

- Członkowie komisji:
  dr Bartłomiej Bzdęga (przewodniczący), dr hab. Małgorzata Bednarska-Bzdęga, mgr Jędrzej Garnek, mgr Łukasz Nizio, Piotr Mizerka, Sylwester Swat.

- Zespół przygotowujący zadania konkursowe:
  dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Jędrzej Garnek, Mieczysław Krawiarz, Wojciech Wawrów.

Wyniki konkursu

Nagrody I stopnia

Kamil Piechowiak 15 (144)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Piotr Piątyszek 15 (128)
Uczeń 3 klasy Zespołu Szkół Komunikacji w Poznaniu.

Nagrody II stopnia

Natalia Adamska 12 (102)
Uczennica 3 klasy 3 Gimnazjum w Szamotułach.

Cezary Botta 12 (102)
Uczeń 2 klasy Gimnazjum im. Noblistów w Rokietnicy.

Patryk Morawski 12 (96)
Uczeń 1 klasy VII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Patryk Matusiak 11 (97)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Piotr Kamiński 10 (93)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Piotr Góreczny 10 (89)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Konrad Hreczycho 9 (85)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Michał Matak 8 (71)
Uczeń 1 klasy VII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Jacek Gulij 8 (69)
Uczeń 3 klasy III Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyróżnienia

Tomasz Wiśniewski 6 (61)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Maksymilian Mańko 6 (55)
Uczeń 1 klasy International School of Poznan.

Paweł Filipiak   5 (60)
Uczeń 1 klasy Zespołu Szkół nr 1 w Szamotułach.

Paweł Nadolny   5 (50)
Uczeń 3 klasy II Liceum Ogólnokształcącego w Lesznie.

Maciej Jesse   5 (43)
Uczeń 3 klasy Zespołu Szkół Komunikacji w Poznaniu.

Wojciech Doberschűtz   4 (45)
Uczeń 1 klasy II Liceum Ogólnokształcącego w Gnieźnie.

Treści zadań

Zestaw A

A1. Rozwiązać równanie
$$n! + 2 = m^3$$
w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

A2. Dany jest trójkąt ABC. Punkt D leży na odcinku BC, a punkt E na odcinku AD, przy czym zachodzą równości $AC = BC = AD$ oraz $BD = ED$. Dowieść, że
$$\sphericalangle ABE + 2\sphericalangle DBE = 90^\circ.$$

A3. Wykazać, że dla liczb rzeczywistych $x, y, z \geqslant \frac{1}{2}$, spełniających warunek $xyz = 1$ zachodzi nierówność
$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geqslant x + y + z + 3.$$

A4. W trójkącie różnobocznym ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę 60°. Punkty $P \neq A$ i $Q \neq B$ leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC oraz spełniają zależności $AP \parallel BC$ i $BQ \parallel AC$. Wykazać, że $AP = BQ$.

A5. W zależności od liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć największą liczbę k o następującej własności:
Można wybrać k takich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że każde dwa różne wybrane podzbiory mają co najwyżej jeden element wspólny.

Zestaw B

B1. Prostopadłościan P o wymiarach $a \times b \times c$ złożony jest z abc sześcianików o wymiarach $1 \times 1 \times 1$. Dwóch graczy wbija na zmianę igły w P, równolegle do wybranej krawędzi, przebijając tym samym a, b lub c sześcianików. Żaden sześcianik nie może być przebity dwa razy. Przegrywa gracz, który jako pierwszy nie może wbić igły zgodnie z podanymi prawidłami. Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c), dla których rozpoczynający grę posiada strategię zapewniającą mu wygraną niezależnie od tego, co zrobi przeciwnik.

B2. Różne liczby naturalne a, b, d spełniają warunki:
$$d = \mathtt{NWD}(a, b) \qquad \text{oraz} \qquad d + 1 = \mathtt{NWD}(a + 1, b + 1).$$
Udowodnić, że $d < \sqrt{|a - b|}$.

B3. Dany jest trójkąt ABC oraz takie punkty D, E, F, że punkt C jest środkiem odcinka BD, punkt A jest środkiem odcinka CE oraz punkt B jest środkiem odcinka AF. Udowodnić, że środki ciężkości trójkątów ABC i DEF się pokrywają.

B4. Na tablicy napisano $n \geqslant 1$ liczb całkowitych dodatnich mniejszych od $2n$, niekoniecznie różnych. Następnie, dopóki było to możliwe, wykonywano operację polegającą na zmazaniu dwóch zapisanych liczb $a, b > 1$ i dopisaniu liczby $\left\lfloor \frac{ab}{a+b} \right\rfloor$. Wykazać, że na tablicy pozostała przynajmniej jedna jedynka.
(Symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza zaokrąglenie x w dół do najbliższej liczby całkowitej.)

B5. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą różnymi liczbami pierwszymi, mniejszymi od liczby naturalnej n. Liczba n przy dzieleniu przez $p_1, p_2, \ldots, p_k$ daje niezerowe reszty odpowiednio $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Połóżmy ponadto $p = \min\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ oraz $r = \max\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$. Dowieść, że $n^r > p^k$.

Zestaw C

C1. Dany jest wielomian P o współczynnikach rzeczywistych. Każda liczba całkowita dodatnia występuje w ciągu $P(1), P(2), P(3), \ldots$ przynajmniej raz. Udowodnić, że stopień wielomianu P jest równy 1.

C2. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p o następującej własności: w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{1}{p}$ na p-tym miejscu po przecinku znajduje się cyfra zero.

C3. Kwadrat o wymiarach $n \times n$ podzielono na n^2 kwadratów jednostkowych. Każdy odcinek będący bokiem któregokolwiek z kwadratów 1×1 pomalowano na biało lub czarno. Okazało się, że każdy kwadrat jednostkowy ma dokładnie dwa boki białe i dwa czarne. Udowodnić, że liczba białych odcinków jednostkowych na brzegu kwadratu $n \times n$ jest parzysta.

C4. Przekątne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg o środku O przecinają się w punkcie P. Okręgi opisane na trójkątach ABP i CDP przecinają się w punkcie $E \neq P$, a okręgi opisane na trójkątach BCP i DAP w punkcie $F \neq P$. Wykazać, że punkty E, F, O, P leżą na jednym okręgu.

C5. Funkcja f określona dla argumentów rzeczywistych dodatnich i przyjmująca wartości rzeczywiste spełnia dla każdego $x > 0$ równość

$$f(x)^2 = 1 + (x-1)f(x+1).$$

Dowieść, że jeśli $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \geqslant 1$, to $f(x) \geqslant x$ dla wszystkich $x \geqslant 1$.

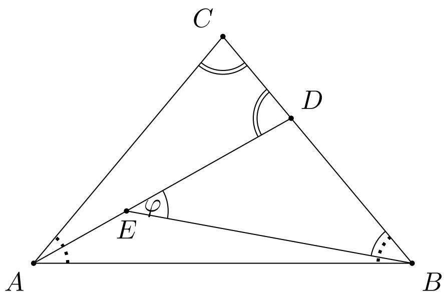
Szkice rozwiązań

A1. Liczba m^3 dzieli się przez 8 dla m parzystych, a dla m nieparzystych liczba ta jest nieparzysta. Jeżeli $n \geqslant 4$, to

$$n! + 2 = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}_{=24} \cdot \ldots \cdot n + 2$$

jest liczbą parzystą niepodzielną przez 8, wobec tego nie może być sześcianem liczby naturalnej. Zatem $n \leqslant 3$. Po bezpośrednim sprawdzeniu okazuje się, że rozwiązanie całkowitoliczbowe daje tylko $n = 3$ – mamy wtedy $m = 2$.

A2. Równości boków w treści zadania są równoważne równościom odpowiednich kątów, zaznaczonych na rysunku obok. Niech $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BED = \varphi$. Wówczas



$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC = 2\varphi,$$

więc $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 90° - \varphi$ oraz

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC - \sphericalangle DBE = 90° - 2\varphi.$$

Stąd $\sphericalangle ABE + 2\sphericalangle DBE = 90°$.

A3. Na mocy warunku $xyz = 1$, zadana nierówność jest równoważna nierównościom

$$4(yz + zx + xy) \geqslant 2(x + y + z) + 6,$$
$$4(yz + zx + xy) \geqslant 2(x + y + z) + 8xyz - x^2y^2z^2 - 1,$$

a po przekształceniach

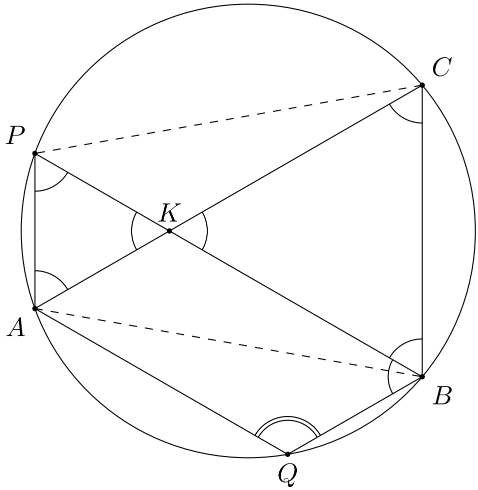
$$x^2y^2z^2 \geqslant (2x - 1)(2y - 1)(2z - 1).$$

Powyższą nierówność otrzymamy mnożąc stronami nierówności

$$x^2 \geqslant 2x - 1, \qquad y^2 \geqslant 2y - 1, \qquad z^2 \geqslant 2z - 1,$$

w których obydwie strony są nieujemne na mocy założenia $x, y, z \geqslant \frac{1}{2}$. Są one prawdziwe, gdyż $a^2 \geqslant 2a - 1 \iff (a - 1)^2 \geqslant 0$ dla każdego a rzeczywistego.

A4. Załóżmy, bez utraty ogólności, że $AC > BC$. Wówczas punkt Q leży na krótszym łuku AB, zaś punkt P – na łuku AC nie zawierającym B.



Niech K będzie punktem przecięcia się odcinków AC i BP. Skorzystamy trzykrotnie z faktu, że trapez wpisany w okrąg jest równoramienny. Najpierw dla trapezu $ABCP$: daje nam to równości

$$\sphericalangle CBP = \sphericalangle CAP = \sphericalangle BPA = 60^\circ.$$

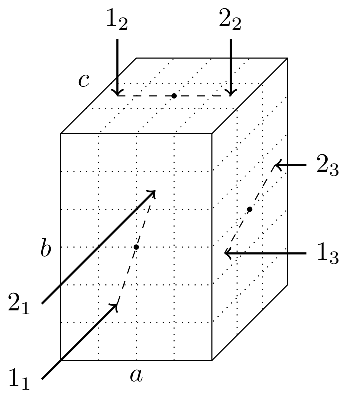
W takim razie trójkąty APK i BCK są równoboczne. Teraz dla trapezu $ACBQ$:

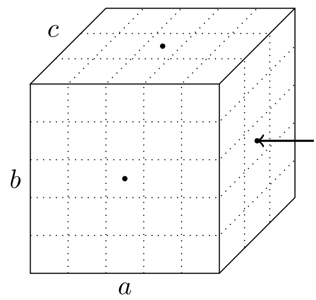
$$\sphericalangle QBC = \sphericalangle AQB = 120^\circ,$$

więc $\sphericalangle QBK = 60^\circ$. Z tego wynika, że $\sphericalangle AQB + \sphericalangle QBC = 180^\circ$, więc $AQ \parallel BP$. Wobec tego czworokąt $APBQ$ jest trapezem równoramiennym, czyli $AP = BQ$.

A5. Wybierzmy pewną liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ zgodnie z warunkami zadania. Nazwijmy wybrany podzbiór *dużym*, jeśli ma przynajmniej dwa elementy. Każdemu dużemu zbiorowi przypisujemy dowolny jego dwuelementowy podzbiór. Przypisane podzbiory są różne, gdyż w przeciwnym razie te duże zbiory miałyby przynajmniej dwa elementy wspólne, a tak być nie może. Zatem liczba wybranych dużych podzbiorów nie przekracza liczby podzbiorów dwuelementowych, czyli $\binom{n}{2}$. Wszystkich podzbiorów, które nie są duże jest $n+1$ (zbiory jednoelementowe i zbiór pusty). Zatem nie można wybrać więcej niż $\binom{n}{2} + n + 1 = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ podzbiorów. Na koniec zauważmy, że to oszacowanie górne jest optymalne – taką liczbę podzbiorów otrzymamy, wybierając wszystkie o co najwyżej dwóch elementach.

B1. Udowodnimy, że jeśli wśród liczb a, b, c są co najmniej dwie parzyste, to drugi gracz ma strategię wygrywającą, a w przeciwnym razie posiada ją gracz pierwszy.
Załóżmy najpierw, że co najmniej dwie spośród liczb a, b, c są parzyste – niech będą to a i b. Wówczas na jakikolwiek ruch pierwszego gracza drugi odpowiada ruchem środkowosymetrycznym względem środka ściany, w którą gracz pierwszy wbił igłę. Zapisy 1_n i 2_n na rysunku po lewej stronie oznaczają odpowiednio n-ty ruch pierwszego i drugiego gracza. Ponieważ nie jest możliwe przebicie środka żadnej ze ścian, gracz drugi ma odpowiedź na każdy ruch pierwszego gracza ze względu na środkowosymetryczność zbioru przebitych sześcianików. Można wykonać jedynie skończoną liczbę ruchów, zatem gracz drugi w tym przypadku wygrywa.





Niech teraz wśród liczb a, b, c będą co najmniej dwie nieparzyste, powiedzmy b i c. Wówczas gracz pierwszy w pierwszym ruchu może przebić środek prostopadłościanu, wbijając igłę w środek ściany $b \times c$ (rysunek z lewej strony). Następnie stosuje strategię analogiczną do strategii drugiego gracza z poprzedniego przypadku.

B2. Liczba $a-b=(a+1)-(b+1)$ jest podzielna zarówno przez d jak i przez $d+1$. Ponieważ d i $d+1$ są względnie pierwsze, mamy $d(d+1) \mid a-b$. Z tej podzielności, wobec nierówności $|a-b|>0$, otrzymujemy

$$|a-b| \geqslant d(d+1) > d^2,$$

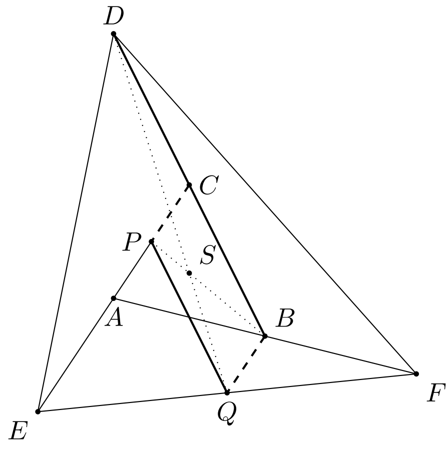
co jest równoważne tezie.

B3. Niech S będzie punktem przecięcia środkowej BP trójkąta ABC i środkowej DQ trójkąta DEF.
Punkty B i Q są środkami boków AF i EF trójkąta AEF, więc $BQ \parallel CE$ oraz $BQ = \frac{1}{2}AE = CP$. Zatem czworokąt $BCPQ$ jest równoległobokiem. Stąd

$$PQ \parallel DB, \quad PQ = BC = \frac{1}{2}BD.$$

Wobec tego trójkąt PQS jest podobny do trójkąta BDS w skali $\frac{1}{2}$, a z tego wynika równość

$$\frac{DS}{SQ} = \frac{BS}{SP} = 2.$$



Środkowe w trójkącie dzielą się w stosunku $2:1$, więc S jest wspólnym środkiem ciężkości trójkątów ABC i DEF.

B4. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że na tablicy nie pozostała żadna jedynka i nie można dalej wykonywać operacji opisanej w zadaniu. W takim wypadku na tablicy widnieje dokładnie jedna liczba i jest ona większa lub równa 2. Na mocy nierówności

$$\frac{1}{\lfloor ab/(a+b)\rfloor} \geqslant \frac{1}{ab/(a+b)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

wnioskujemy, że suma odwrotności liczb napisanych na tablicy w żadnym kroku nie może zmaleć. Na początku ta suma była mniejsza od $\frac{1}{2}$, a na końcu wynosi najwyżej $\frac{1}{2}$ – sprzeczność.

B5. Liczba n daje przy dzieleniu przez każdą z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$ resztę w zbiorze $\{1, 2, \ldots, r\}$. Na mocy zasady szufladkowej, przynajmniej $t = \lceil k/r \rceil$ liczb pierwszych daje tę samą resztę. Bez straty ogólności niech będą to $p_1, p_2, \ldots, p_t$ i reszta r_1. Liczba $n - r_1$ jest podzielna przez $p_1, p_2, \ldots, p_t$. Są to różne liczby pierwsze, zatem ich iloczyn również dzieli $n - r_1$. Ponadto $n - r_1 > n - p_1 > 0$. Wobec tego zachodzą nierówności

$$n > n - r_1 \geqslant p_1 p_2 \ldots p_k \geqslant p^t = p^{\lceil k/r \rceil} \geqslant p^{k/r}.$$

Podnosząc końce nierówności do potęgi r, otrzymujemy tezę.

C1. Wielomiany stałe nie spełniają warunków zadania. Niech zatem

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ma stopień $n \geqslant 1$. Podstawmy

$$A = n \cdot \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|\}.$$

Dla $x \geqslant 1$ oraz $k = 0, 1, \ldots, n-1$ zachodzą nierówności $-\frac{A}{n} x^{n-1} \leqslant a_k x^k \leqslant \frac{A}{n} x^{n-1}$. Wobec tego dla $x \geqslant 1$ mamy

$$a_n x^n - A x^{n-1} \leqslant P(x) \leqslant a_n x^n + A x^{n-1}.$$

Jeśli $a_n < 0$, to dla wszystkich $x > \frac{A}{|a_n|}$ zachodzi nierówność $P(x) < 0$, czyli w ciągu $P(1), P(2), \ldots$ jest tylko skończenie wiele liczb dodatnich. Zatem musi być $a_n > 0$. Niech $m > \frac{A+1}{a_n}$ będzie liczbą naturalną. Wśród liczb $P(1), P(2), \ldots, P(m-1)$ brakuje przynajmniej jednej liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$, nazwijmy taką y. Zatem liczba y występuje w ciągu $P(m), P(m+1), \ldots$. Prowadzi to do nierówności

$$a_n m^n - A m^{n-1} \leqslant \min\{P(m), P(m+1), \ldots\} \leqslant y \leqslant m.$$

Dla $n \geqslant 2$ otrzymamy z niej sprzeczność

$$A + 1 < m a_n \leqslant A + \frac{1}{m^{n-2}} \leqslant A + 1.$$

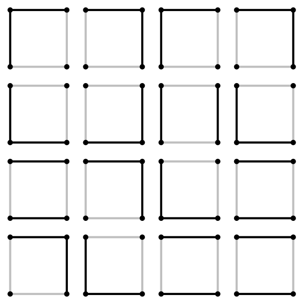
Zatem $n = 1$.

C2. Rozważmy najpierw p względnie pierwsze z 10. Na mocy małego twierdzenia Fermata zachodzi podzielność $p \mid 10^{p-1} - 1$. Niech $\overline{a_{p-1} \ldots a_1 a_0}$ będzie zapisem dziesiętnym liczby $\frac{10^p-1}{p}$, w którym dopuszczamy zera początkowe. Rozważmy liczbę $x = \overline{0,(a_{p-1} \ldots a_1 a_0)}$. Wówczas

$$\begin{aligned} 10^p \cdot x - x &= \overline{a_{p-1} \ldots a_1 a_0,(a_{p-1} \ldots a_1 a_0)} - \overline{0,(a_{p-1} \ldots a_1 a_0)} \\ &= \overline{a_{p-1} \ldots a_1 a_0} = \frac{10^p - 1}{p}, \end{aligned}$$

zatem $x = \frac{1}{p}$. To oznacza, że p-ta cyfra rozwinięcia dziesiętnego $\frac{1}{p}$ jest taka sama jak pierwsza, czyli równa zero dla $p > 10$ i różna od zera dla $p = 3$ i $p = 7$. Pozostają jeszcze $\frac{1}{2} = 0{,}5000\ldots$ i $5 = 0{,}2000\ldots$, które posiadają zero na odpowiednio drugim i piątym miejscu po przecinku.

C3. Niech b oznacza liczbę białych odcinków na brzegu kwadratu $n \times n$, zaś w – w jego wnętrzu. Narysujmy każdy kwadrat jednostkowy z osobna, jak na rysunku obok. Taki sam efekt otrzymamy rozcinając wyjściowy kwadrat $n \times n$ na kwadraty jednostkowe. Wówczas narysujemy $2n^2$ białych odcinków jednostkowych, przy czym każdy odcinek brzegowy jednokrotnie, a wewnętrzny – dwukrotnie. Daje to równość



$$b + 2w = 2n^2,$$

z której natychmiast wnioskujemy, że b jest liczbą parzystą.

C4. Niech PK i PL będą średnicami, zaś S i T środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ABP i CDP. Zachodzą następujące równości:

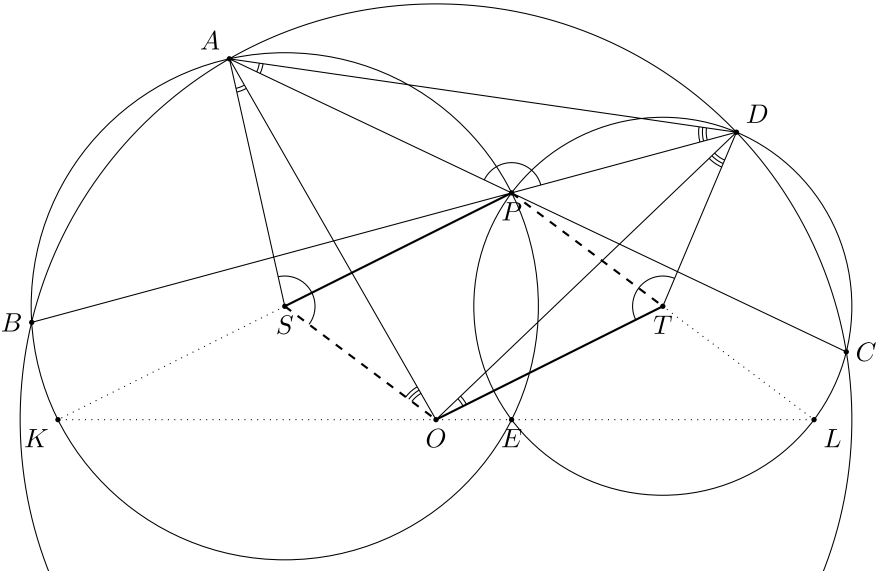
$$\sphericalangle DOT = \frac{1}{2}\sphericalangle COD = \sphericalangle CAD = \sphericalangle PAD,$$

$$\sphericalangle DTO = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle CTD = 180^\circ - \sphericalangle CPD = \sphericalangle APD.$$

Z tego oraz z analogicznego rachunku na kątach otrzymujemy podobieństwa

$$\triangle OTD \sim \triangle APD \sim \triangle ASO.$$

Ponadto $AO = DO$, zatem trójkąty OTD i ASO są przystające.



Na mocy równości

$$SO = DT = PT \quad \text{oraz} \quad OT = AS = PS$$

czworokąt $PSOT$ jest równoległobokiem. Z tego wynika, że punkt O jest środkiem odcinka KL, gdyż S i T są środkami odcinków odpowienio PK i PL.
Kąty KEP i LEP są proste jako oparte na półokręgach. Zatem punkt O leży na prostej KL prostopadłej do PE, przechodzącej przez E. W takim razie okrąg o średnicy OP przechodzi przez punkt E. Analogiczne rozumowanie dla punktu F kończy dowód.

C5. Najpierw wykażemy indukcyjnie następujące stwierdzenie dla $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\text{Dla każdego } x > 1 \text{ zachodzi nierówność } f(x) > \frac{x-1}{\sqrt[2^n]{x-1}}. \tag{1}$$

Indukcja startuje od $n = 0$: $f(x) = \sqrt{1 + (x-1)f(x+1)} > 1$, gdyż z założeń $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \geqslant 1$. Załóżmy prawdziwość (1) dla pewnego n. Wówczas

$$f(x) = \sqrt{1 + (x-1)f(x+1)} > \sqrt{(x-1)f(x+1)} > \sqrt{(x-1)x/\sqrt[2^n]{x}}$$
$$> \sqrt{(x-1)^2/\sqrt[2^n]{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt[2^{n+1}]{x-1}}.$$

Przechodząc do granicy, dla każdego $x > 1$ otrzymamy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{x-1}{\sqrt[2^n]{x-1}} = x - 1.$$

Jest jasne, że dla $x = 1$ ta nierówność także jest spełniona.
Teraz wykażemy, znów przez indukcję względem $n = 0, 1, 2, \ldots$, że:

$$\text{Dla wszyskich } x \geqslant 1 \text{ zachodzi nierówność } f(x) \geqslant x - \frac{1}{2^n}. \tag{2}$$

Indukcja startuje od przed chwilą udowodnionej nierówności $f(x) \geqslant x - 1$. Załóżmy prawdziwość (2) dla pewnego n. Wówczas

$$f(x) = \sqrt{1 + (x-1)f(x+1)} \geqslant \sqrt{1 + (x-1)\left(x + 1 - \frac{1}{2^n}\right)} = \sqrt{x^2 - \frac{x}{2^n} + \frac{1}{2^n}}$$
$$> \sqrt{x^2 - 2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}}} = x - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Znów przechodząc do granicy, otrzymujemy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) \geqslant \lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{1}{2^n}\right) = x.$$