ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

IX Wielkopolska Liga Matematyczna

Poznań 2018 r.

Organizacja konkursu

Dziewiąta edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej odbyła się w roku szkolnym 2017/2018. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLM, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Jak co roku, organizację Ligi wsparła Poznańska Fundacja Matematyczna, a także Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Informacja o przeprowadzaniu WLM dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zainteresowanymi. W szkołach wywieszone zostały plakaty informujące o konkursie. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlm.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLM na Facebooku.

W konkursie wzięło udział 22 uczniów szkół średnich oraz trzech gimnazjalistów. Uczniowie reprezentowali Poznań (16), Leszno (3), Szamotuły (2) oraz Gniezno, Kalisz, Ostrów Wielkopolski i Rokietnicę (1). W tej edycji konkursu po raz pierwszy zwyciężyli gimnazjaliści.

Uczestnicy rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia, zestaw B do końca lutego, zestaw C do końca marca. Każdy z zestawów liczył po 5 zadań z różnych działów matematyki. Rozwiązania oceniane były przez Komisję WLM. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów na stronie internetowej WLM ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie IX WLM odbyło się 25 maja 2018 r. na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Uczestnicy, którzy wypadli najlepiej, otrzymali nagrody książkowe. Wszyscy obecni na zakończeniu mogli wysłuchać wykładu pod tytułem *Magiczne kwadraty*, który wygłosił dr Bartłomiej Bzdęga.

Komisja WLM

- Zespół oceniający prace uczestników:
  dr Bartłomiej Bzdęga, dr hab. Małgorzata Bednarska-Bzdęga,
  mgr Jędrzej Garnek, mgr Łukasz Nizio, mgr Piotr Mizerka, Sylwester Swat.
- Zespół przygotowujący zestawy zadań:
  Kacper Bem, dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Jędrzej Garnek,
  Mieczysław Krawiarz, Patryk Matusiak, Wojciech Wawrów.
- Autorzy zadań: dr Bartłomiej Bzdęga (A1, A2, A5, B1, B2, B4, B5, C1, C2, C3, C4, C5), mgr Jędrzej Garnek (A4), Wojciech Wawrów (A3, B4).

Wyniki konkursu

Nagrody I stopnia

Cezary Botta (141)
Uczeń 3 klasy oddziałów gimnazjalnych SP im. Noblistów w Rokietnicy.

Oliwier Urbański (138)
Uczeń 2 klasy oddziałów gimnazjalnych 28 SP w Poznaniu.

Nagrody II stopnia

Natalia Adamska (128)
Uczennica 1 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Szamotułach.

Kosma Kasprzak (124)
Uczeń 2 klasy oddziałów gimnazjalnych XXXVIII Liceum w Poznaniu.

Michał Łopatka (112)
Uczeń 2 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Nagrody III stopnia

Maksymilian Mańko (90)
Uczeń 2 klasy International School of Poznan.

Antoni Solarski (87)
Uczeń 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Jacek Jędruszek (86)
Uczeń 3 klasy III Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Wyróżnienia

Piotr Kamiński (79)
Uczeń 3 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Klaudia Tarabasz (78)
Uczennica 1 klasy VIII Liceum Ogólnokształcącego w Poznaniu.

Mikołaj Chmielecki (76)
Uczeń 2 klasy Liceum Ogólnokształcącego w Ostrowie Wielkopolskim.

Paweł Filipiak (72)
Uczeń 2 klasy I Liceum Ogólnokształcącego w Szamotułach.

Wojciech Doberschűtz (70)
Uczeń 2 klasy II Liceum Ogólnokształcącego w Gnieźnie.

Treści zadań

Zestaw A

A1. Oznaczmy przez $S(k)$ sumę cyfr liczby naturalnej k w zapisie dziesiętnym. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 1$, które spełniają równość $S(11^n) = 2^n$.

A2. Dowieść, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} > 1.$$

A3. Trójkąt ABC wpisany jest w okrąg o środku O i promieniu R. Proste AC i BC przecinają symetralną odcinka AB w punktach odpowiednio P i Q. Wykazać, że $R = \sqrt{OP \cdot OQ}$.

A4. Funkcja $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ spełnia dla każdej liczby naturalnej $n > 0$ równość

$$\underbrace{f(f(\ldots f(}_{n} n)\ldots)) = n.$$

Wykazać, że dla nieskończenie wielu n zachodzi podzielność $n \mid f(n)$.

A5. Ustalmy liczbę naturalną $n \geqslant 2$. Będziemy dalej rozważać ciągi n-elementowe, z których każdy zawiera wszystkie liczby naturalne od 1 do n, w pewnej kolejności. Nazwijmy dwa takie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ podobnymi, jeśli

$$a_i = b_i \text{ dla przynajmniej jednego } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

W zależności od n wyznaczyć największą liczbę k, dla której prawdziwe jest zdanie: Istnieje k różnych ciągów, z których każde dwa są podobne.

Zestaw B

B1. Trójkąt ABC jest prostokątny. Punkt C' jest spodkiem wysokości tego trójkąta, opuszczonej na przeciwprostokątną AB. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AC i BC, przy czym $CK = CL = CC'$. Proste AC i LC' przecinają się w punkcie P, a proste BC i KC' w Q. Dowieść, że $AP + BQ = AB$.

B2. Na okręgu o środku O pomalowano na czerwono pewną liczbę rozłącznych łuków wraz z końcami. Łączna długość wszystkich czerwonych łuków jest większa niż połowa długości okręgu. Dowieść, że jeśli $0° < \alpha \leqslant 180°$, to istnieją takie czerwone punkty A i B, że $\sphericalangle AOB = \alpha$.

B3. Liczba naturalna $n \geqslant 1$ jest nieparzysta. Dla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ niech a_k będzie liczbą naturalną, dla której zachodzą nierówności

$$2^{a_k - 1} \leqslant \frac{n}{k} < 2^{a_k}.$$

Dowieść, że $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_n = n$.

B4. Pięciokąt $ABCDE$ jest wypukły i spełnia warunki

$$AB \parallel CE, \qquad BC \parallel DA, \qquad CD \parallel EB, \qquad DE \parallel AC.$$

Wykazać, że $EA \parallel BD$.

B5. W ciągu $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{4n})$ występują liczby 1 i -1, każda z nich po $2n$ razy. Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia

$$\left| a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + \ldots + a_{4n-2}a_{4n-1}a_{4n} + a_{4n-1}a_{4n}a_1 + a_{4n}a_1a_2 \right|.$$

Zestaw C

C1. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że wśród dowolnie wybranych $3n$ punktów płaszczyzny o obu współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ można wskazać takie cztery różne punkty A, B, C i D, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

C2. Trzy cięciwy pewnego okręgu przecinają się w punkcie P różnym od jego środka O, każde dwie pod kątem 60°. Dowieść, że środki tych cięciw są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

C3. Niech $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych oraz niech $Q(x) = P(P(x))$. Udowodnić, że jeśli P posiada pierwiastek rzeczywisty dodatni, to Q również posiada pierwiastek rzeczywisty dodatni.

C4. Okrąg o jest częścią wspólną sfer s_1 i s_2. Trzy różne punkty A, B i C leżą na okręgu o, a punkt P leży na zewnątrz sfer s_1 i s_2.
Prosta PA przecina sfery s_1 i s_2 w punktach odpowiednio $A_1 \neq A$ i $A_2 \neq A$.
Prosta PB przecina sfery s_1 i s_2 w punktach odpowiednio $B_1 \neq B$ i $B_2 \neq B$.
Prosta PC przecina sfery s_1 i s_2 w punktach odpowiednio $C_1 \neq C$ i $C_2 \neq C$.
Dowieść, że płaszczyzny $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są równoległe.

C5. Niech $d(k)$ oznacza ilość dzielników liczby naturalnej k. Ustalmy liczbę rzeczywistą $a > 1$. Dowieść, że

$$\frac{d(1)}{a^1} + \frac{d(2)}{a^2} + \frac{d(3)}{a^3} + \ldots + \frac{d(n)}{a^n} < \frac{1}{a^1 - 1} + \frac{1}{a^2 - 1} + \frac{1}{a^3 - 1} + \ldots + \frac{1}{a^n - 1}$$

dla wszystkich naturalnych $n \geqslant 1$.

Szkice rozwiązań

A1. Łatwo sprawdzić, że równość $S(11^n) = 2^n$ zachodzi dla $n = 1, 2, 3, 4$. Zastosujemy indukcję, aby wykazać, że $S(11^n) < 2^n$ dla $n \geqslant 5$. Dla $n = 5$ ta nierówność zachodzi. Przypuśćmy, że $S(11^k) < 2^k$ dla pewnego $k \geqslant 5$. Wówczas

$$\begin{aligned} S(11^{k+1}) &= S(11 \cdot 11^k) = S(10 \cdot 11^k + 11^k) \\ &\leqslant S(10 \cdot 11^k) + S(11^k) = 2S(11^k) < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}, \end{aligned}$$

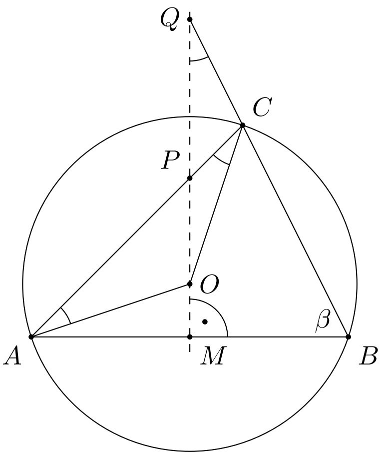
gdyż algorytm dodawania pisemnego gwarantuje, że $S(a + b) \leqslant S(a) + S(b)$ dla naturalnych a i b. Szukanymi liczbami są zatem 1, 2, 3 i 4.

A2. Korzystając z nierówności między średnią harmoniczną a arytmetyczną dla liczb $n, n + 1, \ldots, 3n$, otrzymujemy

$$\frac{2n+1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{3n}} \leqslant \frac{n + (n+1) + \ldots + 3n}{2n+1} = 2n.$$

Wobec tego $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{3n} \geqslant \frac{2n+1}{2n} > 1$.

A3. Teza zachodzi trywialnie gdy $AC = BC$. Niech, bez straty ogólności, $AC > BC$.



Należy uwzględnić dwa przypadki: $\beta < 90°$ oraz $\beta > 90°$ (jeśli $\beta = 90°$, to prosta BC nie przecina symetralnej odcinka AB).

Rozważmy pierwszy z nich. Trójkąt AOC jest równoramienny, gdyż $OA = OC = R$. Stąd

$$\begin{aligned} \sphericalangle ACO &= \frac{180° - \sphericalangle AOC}{2} = \frac{180° - 2\beta}{2} \\ &= 90° - \beta = \sphericalangle BQM. \end{aligned}$$

Zatem trójkąty COP i QOC są podobne na mocy cechy (kk). Wobec tego

$$\frac{OQ}{CO} = \frac{CO}{OP},$$

z czego wnioskujemy, że $OP \cdot OQ = OC^2 = R^2$, co kończy dowód.

Przypadek $\beta > 90°$ przebiega podobnie. Rachunkiem na kątach dochodzimy do podobieństwa trójkątów COP i QOC, z którego w wyżej opisany sposób wynika teza.

A4. Weźmy dowolne naturalne $n > 0$. Rozważmy następujący ciąg $(a_i)_{i \geqslant 0}$:

$$a_0 = n, \qquad a_{i+1} = f(a_i) \text{ dla } i \geqslant 0.$$

Z warunków zadania mamy $a_n = n$, więc liczba n pojawia się w ciągu (a) nie tylko jako zerowy wyraz. Wobec tego możemy wybrać najmniejsze takie $t > 0$, dla którego $a_t = n = a_0$. Indukcyjnie mamy $a_{k+t} = a_k$ dla wszystkich $k \geqslant 0$, więc ciąg ten jest okresowy z okresem zasadniczym t. Wobec tego równość $a_k = n$ zachodzi tylko dla $t \mid k$. Wnioskujemy stąd, że $t \mid n$.
Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla ciągu, który rozpoczyna się wyrazem $b_0 = f(n)$. Wówczas mamy $b_i = a_{i+1}$, więc ciąg (b) również ma okres t. Analogicznie dowodzimy, że $t \mid f(n)$.
Jeśli $n = p$ jest liczbą pierwszą, to $t = 1$ lub $t = p$. W pierwszym przypadku mamy $f(p) = p$, a w drugim $t \mid f(p)$ – w obydwu spełniona jest podzielność $p \mid f(p)$. Dowód jest zakończony, gdyż liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

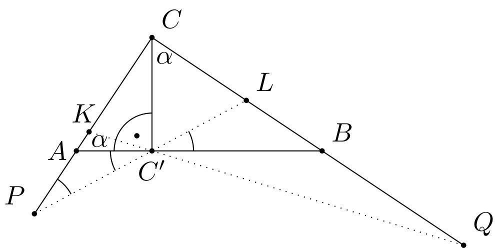
A5. Wykażemy, że szukaną liczbą jest $k = (n-1)!$. Na początek zauważmy, że każde dwa ciągi kończące się liczbą n są podobne, a jest ich właśnie tyle.
Dla danego ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ rozważmy jego cykliczne przesunięcia:

$$(a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1), \quad (a_3, \ldots, a_n, a_1, a_2), \quad \ldots, \quad (a_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}).$$

W ten sposób podzielimy zbiór wszystkich możliwych $n!$ ciągów na n-elementowe, rozłączne klasy. Żadne dwa ciągi z jednej klasy nie są podobne, więc możemy wybrać co najwyżej jeden ciąg z każdej klasy. To dowodzi, że nie można wybrać więcej niż $n!/n = (n-1)!$ ciągów.

B1. Mamy $CC' = CL$, więc

$$\sphericalangle CC'L = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$



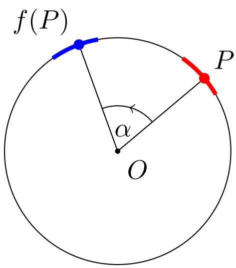
Stąd

$$\sphericalangle AC'P = \sphericalangle BC'L = \frac{\alpha}{2}.$$

Kąt zewnętrzny przy wierzchołku A trójkąta $AC'P$ ma miarę α, więc $\sphericalangle APC' + \sphericalangle AC'P = \alpha$. Z tego wynika, że $\sphericalangle APC' = \sphericalangle AC'P = \frac{\alpha}{2}$, więc $AP = AC'$. Analogicznie dowodzimy, że $BQ = BC'$. Ostatecznie

$$AP + BQ = AC' + BC' = AB.$$

B2. Niech f oznacza obrót o kąt α wokół punktu O, w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.



Dla każdego czerwonego punktu P malujemy na niebiesko punkt $f(P)$. Zbiór niebieskich punktów powstaje ze zbioru czerwonych przez obrót o kąt α wokół punktu O. Zatem suma długości niebieskich łuków jest taka sama jak suma długości czerwonych (w szczególności większa od połowy długości okręgu) i każde dwa niebieskie łuki są rozłączne.

Z tego wynika, że co najmniej jeden punkt okręgu jest jednocześnie czerwony i niebieski. Nazwijmy go B. Z określenia niebieskich punktów wynika, że $B = f(A)$ dla pewnego czerwonego punktu A. Wtedy $\sphericalangle AOB = \alpha$, przy czym punkty A i B są czerwone.

B3. Każdą liczbę całkowitą dodatnią c można jednoznacznie zapisać w postaci

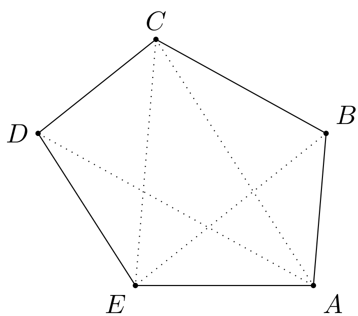
$$c = k \cdot 2^m,$$

w której k jest liczbą nieparzystą, a m liczbą całkowitą nieujemną. Liczbę k nazwijmy *częścią nieparzystą* liczby c.

W zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ część nieparzystą równą k mają liczby $k, 2k, 4k, \ldots, 2^{a_k-1}k$, gdyż z treści zadania $2^{a_k-1}k \leqslant n < 2^{a_k}k$. Mamy więc a_k liczb z częścią nieparzystą k dla $k = 1, 3, 5, \ldots, n$. Z tego wynika, że suma $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_n$ jest równa liczbie elementów zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, czyli n.

B4. Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Z równoległości $EC \parallel AB$ wynika, że $[EAB] = [ABC]$, gdyż trójkąty te mają wspólną podstawę AB, od której wierzchołki E i C są równoodległe. W analogiczny sposób dowodzimy kolejno równości pól

$$\begin{aligned}[EAB] &= [ABC] = [BCD] \\ &= [CDE] = [DEA].\end{aligned}$$



Z równości $[EAB] = [DEA]$ wynika, że punkty B i D są równoodległe od prostej EA. Wobec wypukłości pięciokąta $ABCDE$ prowadzi to do wniosku, że $EA \parallel BD$.

B5. Niech

$$a_3 = a_6 = a_9 = \ldots = a_{3n} = 1, \qquad a_{3n+1} = a_{3n+2} = \ldots = a_{4n} = 1,$$

pozostałe wyrazy równe -1. Wtedy wartość wyrażenia z zadania wynosi $4n-4$. Wykażemy, że jest to największa możliwa wartość. Połóżmy

$$s_i = a_i a_{i+1} a_{i+2} \in \{1, -1\} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, 4n,$$

przy czym przyjmujemy $a_{4n+1} = a_1$ i $a_{4n+2} = a_2$. Szukamy największej wartości bezwzględnej wyrażenia

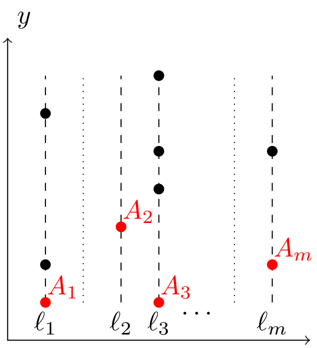
$$S = s_1 + s_2 + \ldots + s_{4n}.$$

Ponieważ $s_1 s_2 \ldots s_{4n} = (a_1 a_2 \ldots a_{4n})^3 = (1^{2n} \cdot (-1)^{2n})^3 = 1$, w sumie S parzysta liczba składników jest równa -1. Niech $2k$ oznacza liczbę składników równych -1, oczywiście k jest całkowite nieujemne. Wtedy

$$S = -2k + (4n - 2k) = 4(n-k),$$

zatem $4 \mid S$. Wystarczy więc wykazać, że $|S| \neq 4n$.
Przypuśćmy, że $S = 4n$; rozumowanie dla $S = -4n$ przebiega analogicznie. Wtedy $s_1 = s_2 = \ldots = s_{4n} = 1$, więc w każdej z $4n$ trójek (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) są trzy jedynki albo jedna. Ponieważ łącznie we wszystkich trójkach jest $6n$ jedynek, w co najmniej jednej z nich muszą być trzy jedynki. Niech więc $a_j = a_{j+1} = a_{j+2} = 1$.
Z równości $s_i = s_{i+1}$ otrzymujemy $a_i = a_{i+3}$, co pozwala udowodnić przez indukcję, że $a_1 = a_2 = \ldots = a_{4n} = 1$. Jest to poszukiwana sprzeczność.

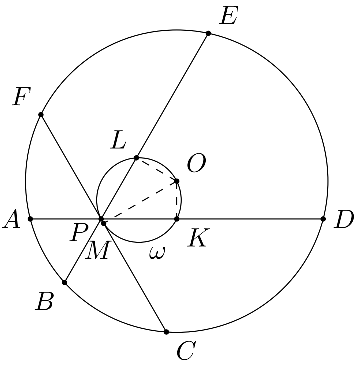
C1. Rozważmy te proste $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$ równoległe do osi OY, na których znajduje się co najmniej jeden wybrany punkt. Niech k_i oznacza liczbę wybranych punktów na prostej ℓ_i dla $i = 1, \ldots, m$. Oczywiście $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = 3n$.



Przez A_i oznaczmy ten wyróżniony punkt na prostej ℓ_i, który ma najmniejszą rzędną (czerwone punkty na rysunku). Rozważmy odcinki równoległe do osi OY o końcach w wyróżnionych punktach, z których jeden jest czerwony. Takich odcinków jest

$$(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \ldots + (k_m - 1) = 3n - m \geqslant 2n,$$

a długość każdego z nich należy do zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Ponieważ $2n > (n-1)$, na mocy zasady szufladkowej mamy dwa różne takie odcinki, które mają jednakową długość. Niech będą to odcinki A_iP i A_jQ. Oczywiście $\overrightarrow{A_iP} = \overrightarrow{A_jQ}$.
Pozostaje tylko zauważyć, że $A_i \neq A_j$, bo w przeciwnym razie byłoby $P = Q$, a odcinki A_iP i A_jQ są różne. Z tego wynika, że A_i, A_j, P i Q są czterema różnymi punktami spełniającymi żądany warunek.



C2. Niech K, L i M będą środkami cięciw odpowiednio AD, BE i CF, spełniających założenia zadania. Wówczas $OK \perp AD$, więc punkt K leży na okręgu ω o średnicy OP. Analogicznie jest dla punktów L i M. Kąt ostry pomiędzy prostymi OK i OL jest taki sam jak kąt ostry pomiędzy prostymi AD i BE, gdyż są do nich odpowiednio prostopadłe. Wobec tego

$$\sphericalangle KOL = 60^\circ \quad \text{lub} \quad \sphericalangle KOL = 120^\circ.$$

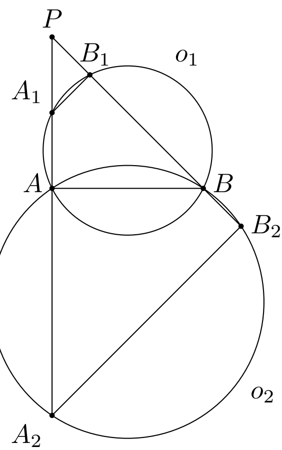
W obydwu przypadkach krótszy łuk KL wyznacza $\frac{1}{3}$ okręgu ω. Analogicznie rozumujemy dla łuków LM i MK. To pozwala wywnioskować, że $KL = LM = MK$, więc KLM jest trójkątem równobocznym.

C3. Niech $x_0 > 0$ oraz $P(x_0) = 0$. Mamy $P(x) \to +\infty$ dla $x \to +\infty$. Na mocy własności Darboux istnieje takie $x_1 \in (x_0, \infty)$, że $P(x_1) = x_0$. Wtedy

$$Q(x_1) = P(P(x_1)) = P(x_0) = 0,$$

przy czym $x_1 > x_0 > 0$, co kończy dowód.

C4. Jeśli punkt P leży na płaszczyźnie ABC, to teza zachodzi trywialnie. W przeciwnym razie niech okręgi o_1 i o_2 będą przekrojami sfer odpowiednio s_1 i s_2 płaszczyzną PAB.
Korzystając z potęgi punktu P względem okręgów o_1 oraz o_2, otrzymamy odpowiednio równości



$$PA \cdot PA_1 = PB \cdot PB_1, \qquad PA \cdot PA_2 = PB \cdot PB_2.$$

Dzieląc je stronami dostaniemy

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{PB_1}{PB_2},$$

co jest równoważne stwierdzeniu, że $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Analogicznie dowodzimy, że $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. Z tych dwóch równoległości wynika, że płaszczyzny $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są równoległe.

C5. Na mocy wzoru na sumę wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego zachodzi równość

$$\underbrace{\frac{1}{a^k} + \frac{1}{a^{2k}} + \frac{1}{a^{3k}} + \ldots}_{S_k} = \frac{1}{a^k - 1} \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wyraz $\frac{1}{a^m}$ występuje w sumie S_k tylko wtedy, gdy $k \mid m$. To oznacza, że w wyrażeniu $S_1 + \ldots + S_n$ składnik $\frac{1}{a^m}$ występuje tyle razy, ile dzielników nie przekraczających n ma liczba m. Oznaczmy tę liczbę przez $d'(m)$. Mamy zatem

$$\frac{1}{a^1 - 1} + \ldots + \frac{1}{a^n - 1} = S_1 + \ldots + S_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d'(m)}{a^m} > \sum_{m=1}^{n} \frac{d'(m)}{a^m} = \sum_{m=1}^{n} \frac{d(m)}{a^m}.$$