ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

# I Wielkopolska Liga Matematyczna Gimnazjalistów

Poznań 2016 r.

# Organizacja konkursu

Pierwsza edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej Gimnazjalistów odbyła się w roku szkolnym 2015/2016. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLMG, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Odbywały się w okresie od stycznia do marca 2016 r. Konkurs jest wzorowany na Wielkopolskiej Lidze Matematycznej adresowanej do uczniów szkół średnich.

Organizację Ligi wsparła Poznańska Fundacja Matematyczna, a także Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Informacja o przeprowadzaniu WLMG dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zaintersowanymi. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlmg.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLMG na Facebooku.

W konkursie wzięło udział 43 uczniów gimnazjów, w większości z Poznania (25 uczestników). Uczniowie rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia 2016 r., zestaw B do końca lutego 2016 r., zestaw C do końca marca 2016 r. Każdy zestaw składał się z 5 zadań z różnych działów matematyki. Rozwiązania zadań oceniane były przez Komisję WLMG. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać jeden *duży* punkt i od 0 do 10 punktów *małych*. W kilkanaście dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów, na stronie internetowej WLMG ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie I WLMG odbyło się 4 czerwca 2016 r. na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Uczestnicy, którzy rozwiązali najwięcej zadań, otrzymali nagrody książkowe oraz gry planszowe. Wszyscy obecni na zakończeniu mogli wysłuchać wykładu dra Marcina Borkowskiego pod tytułem *Skąd się biorą liczby?*

# Komisja WLMG

- Przewodniczący: Przemysław Pela.
- Zespół oceniający prace uczestników: Piotr Berda, Patryk Jankowski, Kinga Kolczyńska-Przybycień, Przemysław Pela, Joanna Stróżyk.
- Zespół przygotowujący zadania konkursowe: Piotr Berda, Patryk Jankowski, Kinga Kolczyńska-Przybycień, Przemysław Pela.
- Opiekunowie WLMG: dr Edyta Juskowiak, dr Bartłomiej Bzdęga

# Wyniki konkursu

## Nagrody I stopnia

Natalia Adamska 15 (138)
Uczennica 2 klasy Gimnazjum nr 3 w Szamotułach.

## Nagroda II stopnia

Cezary Botta 14 (132)
Uczeń 1 klasy Gimnazjum w Rokietnicy.

Klaudia Kowalska 14 (126)
Uczennica 2 klasy Gimnazjum STO w Pile.

Jakub Wachowiak 14 (120)
Uczeń 1 klasy Gimnazjum w Osieku nad Notecią.

Paweł Filipiak 13 (121)
Uczeń 3 klasy Gimnazjum nr 3 w Szamotułach.

Adam Seyda 13 (104)
Uczeń 2 klasy Gimnazjum STO w Pile.

## Nagrody III stopnia

Wojciech Doberschutz 12 (107)
Uczeń 3 klasy Gimnazjum nr 1 w Gnieźnie.

Anna Przybyłowska 11 (111)
Uczennica 3 klasy Gimnazjum nr 12 w Poznaniu.

# Treści zadań

## Zestaw A

**A1.** Dany jest deltoid $ABCD$ o polu powierzchni równym $S$. Niech punkty $W, X, Y, Z$ będą odpowiednio środkami boków $AB, BC, CD, DA$. Wyznacz pole czworokąta $WXYZ$.

**A2.** Czy liczbę 1 można przedstawić w postaci sumy ułamków $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$, gdzie $a, b, c, d$ są liczbami nieparzystymi? Odpowiedź uzasadnij.

**A3.** Mąż i żona mają razem 70 lat. Mąż jest dwa razy starszy niż jego żona była wówczas, gdy on miał tyle lat, ile ona ma teraz. Ile lat ma mąż, a ile żona?

**A4.** Oblicz sumę cyfr, jakich użyto do zapisu liczb od 1 do 1000.

**A5.** Znajdź wszystkie liczby naturalne $n$, dla których każda z liczb $n$, $n + 2$ oraz $n^2 + 5n + 1$ jest liczbą pierwszą.

## Zestaw B

**B1.** Niech punkty $A$ oraz $B$ leżą na okręgu $O$. Wykaż, że zawsze można znaleźć taki punkt $C$ leżący na $O$, że obwód trójkąta $ABC$ jest większy od $4r$, gdzie $r$ jest promieniem okręgu $O$.

**B2.** Czy czworokąt, którego każdy bok ma długość większą niż 1 m może mieć pole mniejsze niż 1 $cm^2$? Odpowiedź uzasadnij.

**B3.** Na obu stronach każdej z 999 kart znajduje się jedna z liczb: 1 albo 2 (na obu stronach kart mogą być takie same liczby lub różne). Jaś ułożył wszystkie karty na stole i obliczył sumę liczb na widocznych stronach kart. Następnie odwrócił wszystkie karty i ponownie obliczył sumę widocznych liczb. W obu przypadkach otrzymał ten sam wynik. Wykaż, że na obu stronach którejś z kart zapisano tę samą liczbę.

**B4.** Dany jest 100-kąt foremny $A_1A_2A_3...A_{100}$. Każdemu z jego wierzchołków $A_1$, $A_2$, ..., $A_{100}$ chcemy przyporządkować liczbę ze zbioru $\{1, 2, ..., 20\}$ w taki sposób, aby suma liczb przyporządkowanych każdym dwóm wierzchołkom wielokąta połączonych przekątną lub bokiem była liczbą pierwszą. Na ile sposobów można to zrobić?

**B5.** Niech $a, b, c$ oznaczają takie liczby rzeczywiste dodatnie, że $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej $x$ zachodzi nierówność:

$$(a + x)(b + x)(c + x) \leqslant x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$$

**Zestaw C**

**C1.** Znajdź taką najmniejszą liczbę naturalną $n$, że $n - 3$ jest podzielne przez 180, zaś $n + 1$ jest podzielne przez 7.

**C2.** Niech $a, b, c$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi nierówność:

$$\sqrt[n]{a+b+c} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}.$$

**C3.** Czy każdy wypukły 2016-kąt można podzielić na trójkąty równoramienne? Odpowiedź uzasadnij.

**C4.** Znajdź wszystkie liczby całkowite $x$, dla których każda z liczb

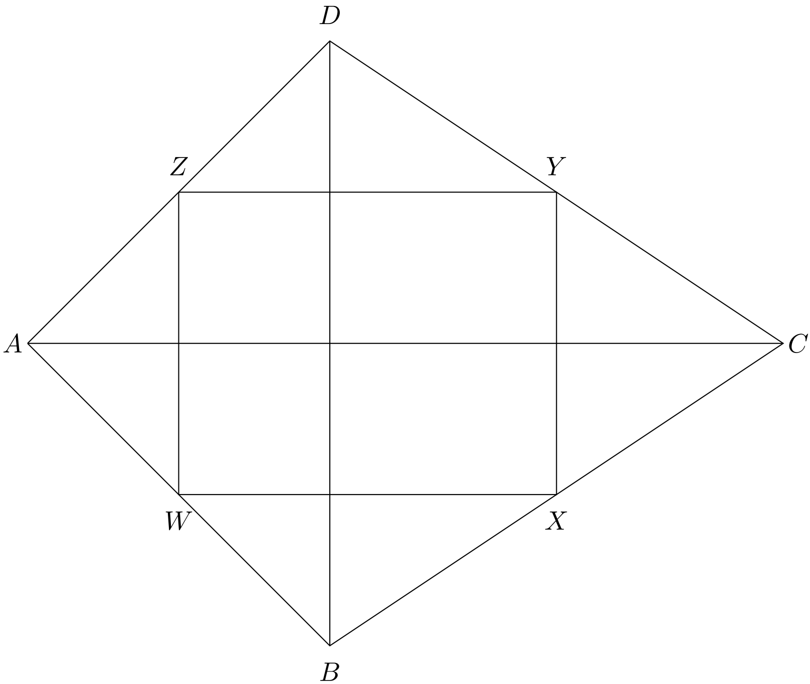
$$\frac{8x-4}{x^2+3x+2} \quad \text{oraz} \quad \frac{3x^2-8x+6}{3x^2-5x-3}$$

jest liczbą naturalną.

**C5.** Czy szachownicę o wymiarach $99 \times 99$ można pokryć prostokątami o wymiarach $1 \times 6$ w taki sposób, aby nie zostały zakryte jedynie trzy narożne pola tej szachownicy?

# Szkice rozwiązań

**A1.**




Na mocy twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta możemy stwierdzić, że odcinki $WZ, BD, XY$ są równoległe, podobnie jak odcinki $WX, AC, YZ$. Ponadto przekątne deltoidu $AC$ oraz $BD$ są prostopadłe, a zatem prostopadłe są również boki równoległoboku $WXYZ$. Wynika stąd, że czworokąt $WXYZ$ jest prostokątem. Trójkąty $WAZ$ oraz $BAD$ są podobne w skali $k = \frac{1}{2}$ na podstawie cechy BKB, ponieważ mają wspólny kąt przy wierzchołku $A$, a ich odpowiednie boki są proporcjonalne (punkty $W$ oraz $Z$ są środkami boków). W analogiczny sposób możemy uzasadnić podobieństwa: $XCY \sim BCD$, $WBX \sim ABC$, $ADC \sim ZYD$.
Z powyższych rozważań wynika, że

$$P_{WXYZ} = |WZ| \cdot |WX| = \frac{|BD|}{2} \cdot \frac{|AC|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|BD| \cdot |AC|}{2} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} = \frac{S}{2}.$$

**A2.** Przypuśćmy, że takie przedstawienie istnieje. Wobec tego mamy

$$\frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd} = 1.$$

Stąd otrzymujemy równość

$$bcd + acd + abd + abc = abcd.$$

Liczby $a, b, c, d$ są liczbami nieparzystymi, więc lewa strona jest sumą czterech iloczynów liczb nieparzystych, a zatem liczbą parzystą. Natomiast prawa strona jest iloczynem liczb nieparzystych, a zatem liczbą nieparzystą. Obie strony równości różnią się parzystością, stąd początkowe przypuszczenie było fałszywe. Ostatecznie odpowiedź na postawione pytanie jest negatywna.

**A3.** Niech $x$ oznacza wiek męża obecnie, natomiast $70 - x$ wiek jego żony obecnie. W przeszłości mąż miał $70-x$ lat i od tamtego czasu upłynęło $x-(70-x) = 2x-70$ lat. Zatem wiek żony w przeszłości wynosił $70-x-(2x-70) = 140-3x$ lat. Z treści zadania wynika że, żona w przeszłości była dwa razy młodsza niż mąż obecnie, skąd $0,5x = 140 - 3x$, czyli $x = 40$. Ostatecznie mąż ma 40 lat, a żona 30 lat.

**A4.** Zauważmy, że w zapisie

$$000, 001, 002, \ldots, 999$$

każda z cyfr $1, 2, 3, \ldots, 9$ występuje trzystukrotnie (sto razy na każdej pozycji). Przykładowo, cyfrę 1 na miejscu jedności odnajdujemy w liczbach:

$$\begin{gathered} 001, 011, 021, \ldots, 091 \\ 101, 111, 121, \ldots, 191 \\ \vdots \\ 901, 911, 921, \ldots, 991, \end{gathered}$$

zatem istotnie występuje ona stokrotnie na pozycji jedności. Możemy przeprowadzić analogiczną obserwację dla każdej z cyfr $1, 2, 3, \ldots 9$ na miejscach jedności, dziesiątek i setek.
Stąd, pamiętając o liczbie 1000, otrzymujemy sumę wszystkich cyfr równą

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) \cdot 300 + 1 = 13501.$$

**A5.** Zauważmy, że $n = 0$ nie spełnia warunków zadania. Rozważamy teraz $n \neq 0$ w zależności od reszty, którą daje przy dzieleniu przez 3:

- Liczba $n$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 0, czyli $n = 3k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Zgodnie z warunkami zadania $n$ ma być liczbą pierwszą, czyli $k = 1$. Wówczas $n^2 + 5n + 1 = 9 + 15 + 1 = 25$ nie jest liczbą pierwszą, a zatem $n = 3$ nie spełnia warunków zadania.

- Liczba $n$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, czyli $n = 3k + 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wtedy
$$n + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1),$$
a zatem, jeżeli $k \neq 0$, to $3(k+1)$ jest liczbą złożoną. W przypadku $k = 0$ mamy $n = 1$, ale 1 nie jest liczbą pierwszą.

- Liczba $n$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, czyli $n = 3k + 2$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wtedy
$$\begin{aligned} n^2 + 5n + 1 &= (3k + 2)^2 + 5(3k + 2) + 1 = \\ &= 9k^2 + 12k + 4 + 15k + 10 + 1 = \\ &= 9k^2 + 27k + 15 = 3(3k^2 + 9k + 5), \end{aligned}$$
a ponieważ $3k^2+9k+5 > 1$ dla $k \in \mathbb{N}$, liczba $n^2+5n+1$ jest złożona (podzielna przez 3 i większa niż 3).

Ostatecznie nie istnieje liczba naturalna $n$, dla której każda z liczb $n$, $n + 2$ oraz $n^2 + 5n + 1$ jest liczbą pierwszą.

**B1.** Gdyby odcinek $AB$ był średnicą okręgu $O$, to wystarczyłoby wziąć dowolny punkt okręgu $O$ różny od punktów $A$ oraz $B$. Załóżmy więc, że $AB$ nie jest średnicą okręgu.
Poprowadźmy średnicę okręgu O przechodzącą przez punkt $A$ i przecinającą okrąg w punkcie $C$. Wiemy, że $|AC| = 2r$. Z nierówności trójkąta otrzymujemy
$$|AB| + |BC| > |AC| = 2r.$$
Stąd $|AB|+|BC|+|AC| > 2r+2r = 4r$, czyli znaleziony trójkąt $ABC$ jest trójkątem spełniającym warunki zadania.

**B2.** Taki czworokąt istnieje. Przykładem jest romb, którego przekątne mają długości 2 m oraz 0,02 mm.
Pole tego rombu spełnia warunki zadania, ponieważ wynosi
$$P = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 0,02mm = \frac{1}{2} \cdot 200cm \cdot 0,002cm = 0,2cm^2 < 2cm^2.$$
Pozostaje udowodnić, że każdy bok tego rombu ma długość większą niż 1 m. Romb ten jest zbudowany z czterech trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych długości 1 m oraz 0,01 mm, więc długość boku rombu (czyli długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego) jest większa od 1 m.

**B3.** Niech wśród kart, które Jaś ułożył na stole $x$ będzie położonych do góry jedynką, a $999 - x$ dwójką. Suma liczb na widocznych stronach kart jest równa:
$$x + 2(999 - x) = 1999 - 2x.$$

Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że na obu stronach każdej z kart napisano inną liczbę. Wtedy suma liczb na „niewidocznych” stronach kart byłaby równa

$$999 - x + 2x = 999 + x.$$

Wówczas, aby warunki zadania były spełnione musi zachodzić następująca równość:

$$1999 - 2x = 999 + x$$
$$x = \frac{1000}{3},$$

co nie jest możliwe, ponieważ $x$ (liczba kart) jest liczbą naturalną. Ta sprzeczność dowodzi, że na obu stronach którejś z kart zapisano tę samą liczbę.

**B4.** Zauważmy, że do ponumerowania wierzchołków tego 100-kąta można użyć co najwyżej jednej liczby parzystej. W przeciwnym wypadku, gdyby dwa z wierzchołków były oznaczone liczbami parzystymi, to ich suma byłaby liczbą parzystą większą od 2, a zatem liczbą złożoną.

Zauważmy ponadto, że do numeracji wierzchołków nie można użyć liczby nieparzystej większej od 1. W przeciwnym wypadku suma tej liczby oraz dowolnej innej liczby nieparzystej byłaby liczbą parzystą większą od 2, a zatem liczbę złożoną.

Zatem do ponumerowania wierzchołków można użyć albo 100 jedynek albo liczbę parzystą i 99 jedynek. W pierwszym przypadku wszystkie możliwe sumy wynoszą 2 i są liczbami pierwszymi. W drugim przypadku, aby suma użytej liczby parzystej oraz jedynki była liczbą pierwszą, liczba parzysta musi być o jeden mniejsza od liczby pierwszej. Jedynymi liczbami parzystymi spełniającymi warunki zadania są: 2, 4, 6, 10, 12, 16 oraz 18.

Podsumowując, do numeracji wierzchołków można użyć stu jedynek albo 99 jedynek i jednej liczby ze zbioru $\{2, 4, 6, 10, 12, 16, 18\}$.

Ponieważ w każdym numerowaniu zawierającym liczbę parzystą, można umieścić ją w dowolnym ze stu wierzchołków, liczba możliwych numeracji jest równa $1+100\cdot 7 = 701$.

**B5.** Z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy:

$$(a+x)(b+x)(c+x) \leqslant \left(\frac{(a+x)+(b+x)+(c+x)}{3}\right)^3 = \left(\frac{a+b+c}{3}+x\right)^3.$$

Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratową otrzymujemy:

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} = 2.$$

Zatem

$$(a+x)(b+x)(c+x) \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}+x\right)^3 \leqslant (2+x)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8.$$

**C1.** Niech $n \in \mathbb{N}$. Z treści zadania wynika, że $n-3=180k$, dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ oraz $n+1=7l$, dla pewnego $l \in \mathbb{N}$. Stąd $n+1=n-3+4=180k+4=7l$. Równanie diofantyczne zapiszemy w postaci $4(45k+1)=7l$, z której wynika, że liczba $45k+1$ musi być wielokrotnością 7. Dzieje się tak dla $k=2$, co daje nam $4 \cdot 91 = 7 \cdot 52$. Zatem otrzymujemy parę $(k,l)=(2,52)$, czyli $n=180k+3=363$. Gdyby istniała mniejsza liczba $n$ spełniająca warunki zadania to musiałaby być ona równa 183 lub 3. Żadna z tych wymienionych liczb nie jest jednak podzielna przez 7.

**C2.** Przekształcając od strony lewej do prawej otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt[n]{a+b+c} = \sqrt[n]{a+b+c} \cdot \frac{\left(\sqrt[n]{a+b+c}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{a+b+c}\right)^n} = \frac{\left(\sqrt[n]{a+b+c}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{a+b+c}\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{a+b+c}{\sqrt[n]{(a+b+c)^{n-1}}} = \frac{a}{\sqrt[n]{(a+b+c)^{n-1}}} + \frac{b}{\sqrt[n]{(a+b+c)^{n-1}}} + \frac{c}{\sqrt[n]{(a+b+c)^{n-1}}} <$$

$$< \frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} + \frac{b}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} + \frac{c}{\sqrt[n]{c^{n-1}}} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}.$$

**C3.** Pokażemy, że taki podział jest możliwy. Niech $P$ będzie dowolnym punktem leżącym wewnątrz dowolnego 2016-kąta. Łączymy ten punkt ze wszystkimi wierzchołkami figury, otrzymując 2016 trójkątów. Dowolny trójkąt można podzielić wysokością na dwa trójkąty prostokątne. Zauważmy teraz, że środek przeciwprostokątnej dowolnego trójkąta prostokątnego jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Zatem dowolny trójkąt prostokątny można podzielić odcinkiem łączącym wierzchołek kąta prostego ze środkiem przeciwprostokątnej na dwa trójkąty równoramienne, w których ramiona mają długość równą długości promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym. Otrzymaliśmy zatem podział dowolnego 2016-kąta na trójkąty równoramienne.

**C4.** Skorzystamy z faktu, że iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest dodatni za jedynym wyjątkiem, w którym jedna z tych liczb wynosi zero (wtedy oczywiście iloczyn wynosi zero). Dla dowodu tego faktu wystarczy zaobserwować, że jeśli żadna z tych liczb nie jest zerem, to są to albo dwie liczby dodatnie, albo dwie ujemne. Teraz zauważmy, że $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ jest liczbą dodatnią na mocy faktu (nie może być zerem, bo jest w mianowniku). Pierwsza z liczb z treści zadania jest naturalna albo gdy licznik ułamka jest równy 0, albo gdy licznik jest dodatnią wielokrotnością mianownika. Pierwszy warunek nie zachodzi dla żadnego $x$ całkowitego, natomiast w drugim przypadku, musi być spełniona nierówność $8x-4 \geqslant x^2+3x+2$. Jest ona równoważna nierówności $(x-2)(x-3) \leqslant 0$. Stąd wnioskujemy (znów powołując się na powyższy fakt), że $x=2$ lub $x=3$. Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $x=2$ druga z liczb nie jest naturalna, a dla $x=3$ obydwie są.

**C5.** Niech lewe górne narożne pole szachownicy będzie czarne, a reszta pól pokolorujmy jak na tradycyjnej szachownicy. Przy takim kolorowaniu każde narożne pole szachownicy $99 \times 99$ jest czarne.

Obliczymy teraz ile czarnych oraz białych pól znajduje się na tak pomalowanej szachownicy. W każdym nieparzystym wierszu tej szachownicy znajduje się 50 pól czarnych i 49 pól białych. W każdym parzystym - 49 pól czarnych i 50 pól białych. Stąd na naszej szachownicy znajduje się $50 \cdot 50 + 49 \cdot 49 = 4901$ pól czarnych i $50 \cdot 49 + 49 \cdot 50 = 4900$ pól białych. Skoro żądamy, żeby trzy narożne pola szachownicy (które są czarne) zostały niezakryte, to do zakrycia pozostanie 4898 pól czarnych i 4900 białych.

Każdy prostokąt $1 \times 6$ zakrywa niezależnie od położenia taką samą liczbę pól czarnych i białych, więc szachownicy $99 \times 99$ nie można pokryć prostokątami $1 \times 6$ w zadany sposób.