ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

POZNAŃSKA FUNDACJA MATEMATYCZNA

II Wielkopolska Liga Matematyczna Gimnazjalistów

Poznań 2017 r.

Organizacja konkursu

Druga edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej Gimnazjalistów odbyła się w roku szkolnym 2016/2017. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLMG, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Odbywały się w okresie od stycznia do marca 2017 r. Konkurs jest wzorowany na Wielkopolskiej Lidze Matematycznej adresowanej do uczniów szkół średnich.

Organizację Ligi wsparła Poznańska Fundacja Matematyczna, a także Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Informacja o przeprowadzaniu WLMG dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zaintersowanymi. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlmg.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLMG na Facebooku.

W konkursie wzięło udział 14 uczniów gimnazjów, w większości z Poznania (9 uczestników). Uczniowie rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia, zestaw B do końca lutego, zestaw C do końca marca. Każdy zestaw składał się z 5 zadań z różnych działów matematyki. Rozwiązania zadań oceniane były przez Komisję WLMG. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać jeden *duży* punkt i od 0 do 10 punktów *małych*. W kilkanaście dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów, na stronie internetowej WLMG ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie II WLMG odbyło się 28 maja 2017 r. na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Uczestnicy, którzy rozwiązali najwięcej zadań, otrzymali nagrody książkowe oraz karty prezentowe do sklepu Empik. Wszyscy obecni na zakończeniu mogli wysłuchać wykładu dra Bartłomieja Bzdęgi pod tytułem *Trójkątne miniaturki*.

Komisja WLMG

- Przewodniczący:
  mgr Przemysław Pela.
- Zespół oceniający prace uczestników:
  dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Piotr Berda, mgr Patryk Jankowski, lic. Robert Kwieciński, mgr Przemysław Pela, mgr Joanna Stróżyk.
- Zespół przygotowujący zadania konkursowe:
  dr Edyta Juskowiak, dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Piotr Berda, mgr Patryk Jankowski, lic. Robert Kwieciński, mgr Przemysław Pela, mgr Joanna Stróżyk.

Wyniki konkursu

Laureaci I stopnia

Natalia Adamska 15 (142)
Uczennica 3 klasy Gimnazjum nr 3 w Szamotułach.

Kosma Kasprzak 15 (140)
Uczeń 1 klasy Gimnazjum nr 58 w Poznaniu.

Laureaci II stopnia

Cezary Botta 14 (131)
Uczeń 2 klasy Gimnazjum w Rokietnicy.

Klaudia Kowalska 13 (122)
Uczennica 3 klasy Gimnazjum STO w Pile.

Jakub Wachowiak 12 (105)
Uczeń 2 klasy Gimnazjum w Osieku nad Notecią.

Laureaci III stopnia

Maksym Ratajczyk 9 (78)
Uczeń 2 klasy Gimnazjum im. Dąbrówki w Gnieźnie.

Wyróżnieni

Piotr Krzyszowski 7 (68)
Uczeń 2 klasy Gimnazjum w Pleszewie.

Zuzanna Makowska 7 (59)
Uczennica 2 klasy Społecznego Gimnazjum nr 1 w Poznaniu.

Marceli Ciesielski 6 (64)
Uczeń 3 klasy Gimnazjum nr 58 w Poznaniu.

Anna Gwizdek 6 (57)
Uczennica 1 klasy Społecznego Gimnazjum nr 1 w Poznaniu.

Marcin Gólski 5 (49)
Uczeń 3 klasy Gimnazjum nr 58 w Poznaniu.

Filip Wachowiak 4 (48)
Uczeń 3 klasy Gimnazjum im. Dąbrówki w Gnieźnie.

Treści zadań

Zestaw A

Zadanie A1. W każde z wybranych osiemnastu pól szachownicy 6×6 wpisano liczbę $+1$, a w każde z pozostałych - liczbę -1. Możemy jednocześnie zmienić znaki wszystkich liczb w jednym wierszu lub jednej kolumnie. Wykazać, że po dowolnej liczbie takich zmian nie można otrzymać tablicy zawierającej dokładnie jedną plus jedynkę.

Zadanie A2. Przeciwprostokątna AB trójkąta prostokątnego ABC ma długość c, a kąt przy wierzchołku B ma miarę $60°$. Wyznaczyć długość promienia okręgu o środku w punkcie B, dzielącego dany trójkąt na dwie części o równych polach.

Zadanie A3. Uporządkować rosnąco liczby: 7^{8^9}, 8^{9^7}, 9^{7^8}. Uzasadnić odpowiedź.

Zadanie A4. Punkty M i N są środkami boków odpowiednio AB i BC kwadratu $ABCD$. Odcinki CM i DN przecinają się w punkcie S. Wykazać, że pole trójkąta CSN stanowi $\frac{1}{20}$ pola kwadratu.

Zadanie A5. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, których nie da się przedstawić w postaci sumy dwóch liczb złożonych (niekoniecznie różnych).

Zestaw B

Zadanie B1. W zapisie dziesiątkowym liczby k występują tylko cyfry 1, 2, 3 i 4, przy czym każda z nich użyta jest 9876 razy. Rozstrzygnąć czy można zapisać te cyfry w takim porządku, żeby liczba k była sześcianem liczby naturalnej.

Zadanie B2. Liczby rzeczywiste $a, b, c \geqslant \frac{1}{6}$ spełniają warunek $a+b+c=1$. Wykazać, że

$$\sqrt{6a-1}+\sqrt{6b-1}+\sqrt{6c-1} \leqslant 3.$$

Zadanie B3. Dane są dwa trójkąty. Wiadomo, że $h_1 = h_1'$, $h_2 = h_2'$ oraz $h_3 = h_3'$, gdzie h_1, h_2, h_3 to wysokości pierwszego trójkąta, zaś h_1', h_2', h_3' to wysokości drugiego trójkąta. Rozstrzygnąć, czy z powyższych równości wynika, że trójkąty te są przystające.

Zadanie B4. W kole o promieniu 22 wyróżniono 2017 punktów. Udowodnić, że pewne dwa wyróżnione punkty są końcami odcinka o długości nie większej niż $\sqrt{2}$.

Zadanie B5. Na wieczorku zapoznawczym spotkało się siedem osób. Okazało się, że każda z nich zna dokładnie dwie inne, które przybyły na to spotkanie. Zakładamy przy tym, że jeśli osoba A zna B, to B zna A. Udowodnić, że wszyscy uczestnicy spotkania mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, by każdy siedział pomiędzy osobami, których nie zna.

Zestaw C

Zadanie C1. Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz trójkąta równobocznego ABC. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P na boki odpowiednio AB, BC i AC. Wykazać, że wartość wyrażenia

$$\frac{|PD| + |PE| + |PF|}{|AD| + |BE| + |CF|}$$

nie zależy od wyboru punktu P i obliczyć ją.

Zadanie C2. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielościan wypukły, którego liczba ścian i liczba wierzchołków są różnymi liczbami pierwszymi.

Zadanie C3. Czy istnieje taka liczba naturalna n, że $\sqrt{n^2 + 7n + 13}$ jest liczbą naturalną? Uzasadnić odpowiedź.

Zadanie C4. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej n. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których zachodzi równość

$$n + S(n) + S\left(S(n)\right) + S\left(S\left(S(n)\right)\right) = 2017.$$

Zadanie C5. W pudełku znajduje się n kulek, przy czym $n > 0$. Ania i Bartek wykonują ruchy na przemian. Każdy rozgrywający może wyjąć z pudełka jedną, dwie lub pięć kulek. Wygrywa ten, kto pozostawi partnerowi puste pudełko. Dla jakich n Ania (gracz rozpoczynający) może zwyciężyć niezależnie od ruchów Bartka? Podać strategię Ani dla tych n.

Szkice rozwiązań zadań

Zestaw A

Zadanie A1. W każde z wybranych osiemnastu pól szachownicy 6×6 wpisano liczbę $+1$, a w każde z pozostałych - liczbę -1. Możemy jednocześnie zmienić znaki wszystkich liczb w jednym wierszu lub jednej kolumnie. Wykazać, że po dowolnej liczbie takich zmian nie można otrzymać tablicy zawierającej dokładnie jedną plus jedynkę.

Rozwiązanie: Zauważmy, że po każdej z opisanych operacji nie zmienia się iloczyn liczb zapisanych w tablicy. Istotnie,

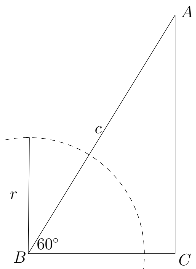
$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = (-a) \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-d) \cdot (-e) \cdot (-f),$$

a zatem po dowolnej liczbie operacji iloczyn liczb wypisanych w tablicy będzie zawsze równy 1. Nie jest zatem możliwe, żeby w tablicy pozostała dokładnie jedna jedynka, bo wówczas iloczyn zapisanych liczb byłby równy -1.

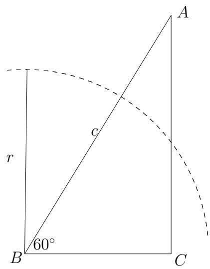
Alternatywne rozwiązanie: Udowodnimy, że suma napisanych na szachownicy liczb jest zawsze podzielna przez 4. Na początku suma wpisanych liczb wynosi 0, czyli jest podzielna przez 4. Zmieniając znaki wierszu lub kolumnie, w której występuje k plus jedynek i $6-k$ minus jedynek zmniejszymy te sumę o $2k$ i zwiększymy o $2(6-k)$, więc ulegnie ona zmianie o $12-4k = 4(3-k)$. Zatem pozostanie podzielna przez 4.

Zadanie A2. Przeciwprostokątna AB trójkąta prostokątnego ABC ma długość c, a kąt przy wierzchołku B ma miarę $60°$. Wyznaczyć długość promienia okręgu o środku w punkcie B, dzielącego dany trójkąt na dwie części o równych polach.

Rozwiązanie: Możliwe są dwie sytuacje. W jednej z nich częścią wspólną jest wycinek kołowy (Rysunek 1), a w drugiej inna figara (Rysunek 2).



Rysunek 1



Rysunek 2

Rozważmy najpierw pierwszą sytuację. Trójkąt ABC jest połową trójkąta równobocznego zatem długości jego boków wynoszą: c, $\frac{c}{2}$, $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Pole wycinka kołowego o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy przy wierzchołku B wynosi $\frac{1}{6}\pi r^2$. Pole trójkąta ABC wynosi zaś

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c\sqrt{3}}{2}=\frac{c^2\sqrt{3}}{8}.$$

Aby spełnione były warunki zadania musi zachodzić równość:

$$\frac{1}{6}\pi r^2=\frac{c^2\sqrt{3}}{16},$$

skąd

$$r=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}.$$

Zauważmy, że $\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}\approx 0.91<1$ zatem

$$r=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}<\frac{c}{2}\cdot 1=\frac{c}{2}.$$

Oznacza to, że częścią wspólna koła i trójkąta dla tej długości promienia jest wycinek kołowy. Powyższe rozważania wykluczają możliwość zaistnienia drugiej sytuacji, która spełniałaby warunki zadania, gdyż wtedy $r>\frac{c}{2}$ i pole części wspólnej trójkąta i otrzymanej figury jest za duże.

Zadanie A3. Uporządkować rosnąco liczby: 7^{8^9}, 8^{9^7}, 9^{7^8}. Uzasadnić odpowiedź.

Rozwiązanie: Z bezpośredniego rachunku $3^7=2187<2401=7^4$, zatem po obustronnym podniesieniu do kwadratu $9^7<7^8$. Stąd otrzymujemy

$$8^{9^7}<8^{7^8}<9^{7^8}.$$

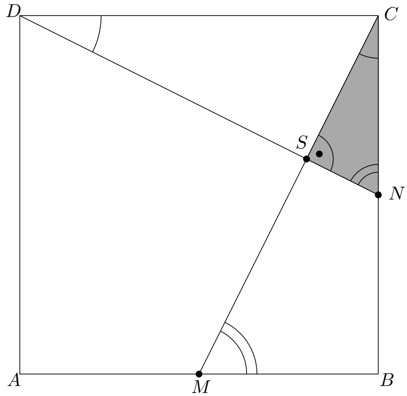
Ponadto

$$9^{7^8}=3^{2\cdot 7^8}<7^{2\cdot 7^8}<7^{2\cdot 8^8}<7^{8^9},$$

zatem $8^{9^7}<9^{7^8}<7^{8^9}$.

Zadanie A4. Punkty M i N są środkami boków odpowiednio AB i BC kwadratu $ABCD$. Odcinki CM i DN przecinają się w punkcie S. Wykazać, że pole trójkąta CSN stanowi $\frac{1}{20}$ pola kwadratu.

Rozwiązanie:



Trójkąty prostokątne BCM oraz CDN są przystające na mocy cechy przystawania trójkątów bok-kąt-bok, ponieważ oba są prostokątne i w każdym z nich dłuższa przyprostokątna ma długość równą długości boku kwadratu, natomiast krótsza przyprostokątna ma długość równą połowy długości boku kwadratu.

Zatem $|\angle CMB| = |\angle DNC|$ oraz $|\angle BCM| = |\angle CDN|$. Wynika stąd, że trójkąt CNS jest prostokątny, ponieważ

$$|\angle SCN| + |\angle CNS| = |\angle BCM| + |\angle DNC| = |\angle BCM| + |\angle CMB| = 90^\circ.$$

Wprowadzając oznaczenia $|BM| = a$ oraz $|BC| = 2a$ z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCM obliczamy $|CM| = a\sqrt{5}$. Trójkąt CNS jest podobny do trójkąta CMB na mocy cechy podobieństwa trójkątów kąt-kąt-kąt w skali $k = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Zatem pole trójkąta CSN stanowi $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$ pola trójkąta CMB. Ostatecznie pole trójkąta CSN stanowi $\frac{1}{20}$ pola kwadratu $ABCD$, ponieważ kwadrat $ABCD$ można podzielić na cztery trójkąty przystające do CMB.

Zadanie A5. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, których nie da się przedstawić w postaci sumy dwóch liczb złożonych (niekoniecznie różnych).

Rozwiązanie: Zauważmy, że najmniejszą złożoną liczbą parzystą jest 4, a nieparzystą 9. Zatem najmniejszą liczbą parzystą, którą można przedstawić w postaci sumy liczb złożonych jest $8 = 4+4$, a najmniejszą liczbą nieparzystą spełniającą powyższe warunki jest $13 = 4+9$.

Wszystkie liczby parzyste większe lub równe 8 można przedstawić w postaci sumy $4+2k$, gdzie $k \geqslant 2$ (bo $4+2k = 2(k+2)$ - liczba parzysta dla $k \in \mathbb{N}$). Wszystkie liczby nieparzyste większe lub równe 13 można przedstawić w postaci $9+2k$, gdzie $k \geqslant 2$ (bo $9+2k = 1+8+2k = 1+2(4+k)$ - liczba nieparzysta dla $k \in \mathbb{N}$). Stąd jedynymi szukanymi liczbami są: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11$.

Zestaw B

Zadanie B1. W zapisie dziesiątkowym liczby k występują tylko cyfry 1, 2, 3 i 4, przy czym każda z nich użyta jest 9876 razy. Rozstrzygnąć czy można zapisać te cyfry w takim porządku, żeby liczba k była sześcianem liczby naturalnej.

Rozwiązanie: Obliczmy sumę cyfr liczby k. Otrzymujemy

$$9876 \cdot (1+2+3+4) = 98760.$$

Jest to liczba podzielna przez 3, ale nie przez 9. Stąd $3 \mid k$, ale $9 \nmid k$, niezależnie od porządku cyfr w liczbie k. Gdyby k było sześcianem liczby naturalnej, to musiałoby się dzielić przez $3^3 = 27$, co nie jest możliwe, bo $9 \nmid k$. Zatem k nie jest sześcianem liczby naturalnej.

Zadanie B2. Liczby rzeczywiste $a, b, c \geqslant \frac{1}{6}$ spełniają warunek $a+b+c = 1$. Wykazać, że

$$\sqrt{6a-1} + \sqrt{6b-1} + \sqrt{6c-1} \leqslant 3.$$

Rozwiązanie: Na mocy nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną mamy

$$\sqrt{6a-1} = \sqrt{(6a-1)\cdot 1} \leqslant \frac{(6a-1)+1}{2} = 3a.$$

Analogiczne nierówności można otrzymać dla pozostałych składników, zatem

$$L \leqslant 3a + 3b + 3c = 3.$$

Alternatywne rozwiązanie: Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną a kwadratową otrzymujemy

$$L = 3 \cdot \frac{\sqrt{3a-1} + \sqrt{3b-1} + \sqrt{3c-1}}{3} \leqslant 3\sqrt{\frac{(3a-1)+(3b-1)+(3c-1)}{3}} = 3.$$

Zadanie B3. Dane są dwa trójkąty. Wiadomo, że $h_1 = h'_1$, $h_2 = h'_2$ oraz $h_3 = h'_3$, gdzie h_1, h_2, h_3 to wysokości pierwszego trójkąta, zaś h'_1, h'_2, h'_3 to wysokości drugiego trójkąta. Rozstrzygnąć, czy z powyższych równości wynika, że trójkąty te są przystające.

Rozwiązanie: Oznaczmy podstawy trójkątów, których wysokościami są h_1, h_2, h_3 oraz h'_1, h'_2, h'_3, odpowiednio przez a, b, c i a', b', c', a pola odpowiednio przez P i P'. Otrzymujemy $P = \frac{ah_1}{2}$ oraz $P' = \frac{a'h'_1}{2}$. Stąd $\frac{a'}{a} = \frac{P'}{P} \cdot \frac{h_1}{h'_1} = \frac{P'}{P}$. Podobnie pokazujemy $\frac{b'}{b} = \frac{P'}{P}$ oraz $\frac{c'}{c} = \frac{P'}{P}$.

Oznaczając $\frac{P'}{P} = k$ otrzymujemy $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$. Zatem trójkąty te są podobne na podstawie cechy bok-bok-bok w skali k. W takim razie stosunek ich pól wynosi $\frac{P'}{P} = k^2$. Zatem $k = k^2$, skąd $k = 1$ albo $k = 0$. Oczywiście drugi przypadek nie zachodzi, więc $k = 1$. Dane trójkąty są przystające.

Zadanie B4. W kole o promieniu 22 wyróżniono 2017 punktów. Udowodnić, że pewne dwa wyróżnione punkty są końcami odcinka o długości nie większej niż $\sqrt{2}$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że na kole o promieniu 22 można opisać kwadrat o boku długości 44. Kwadrat ten można podzielić na $44^2 = 1936$ kwadratów jednostkowych. Rozmieszczonych punktów jest więcej niż kwadratów jednostkowych, więc w pewnym kwadracie jednostkowym znajdą się co najmniej dwa punkty. Ich odległość nie przekracza $\sqrt{2}$, gdyż dłuższy odcinek nie zmieści się w kwadracie jednostkowym.

Alternatywne rozwiązanie: Rozważmy koła o średnicach $\sqrt{2}$ i środkach w wybranych punktach. Należy wykazać, że pewne dwa z tych kół mają część wspólną. Suma pól tych kół wynosi:

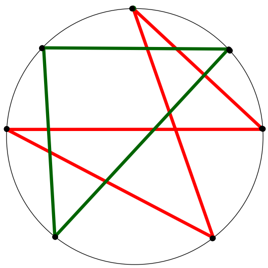
$$2017 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2017 \cdot 0,5\pi = 1008,5\pi.$$

Wszystkie te koła mieszczą się w kole o promieniu 23 (mogą „wystawać” za koło o promieniu 22, ale nie bardziej niż o $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$), którego pole wynosi 529π. Zatem pewne z tych kół mają wspólną część.

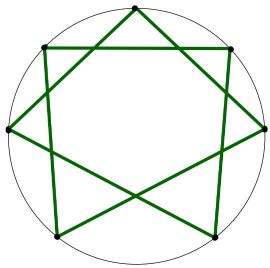
Zadanie B5. Na wieczorku zapoznawczym spotkało się siedem osób. Okazało się, że każda z nich zna dokładnie dwie inne, które przybyły na to spotkanie. Zakładamy przy tym, że jeśli osoba A zna B, to B zna A. Udowodnić, że wszyscy uczestnicy spotkania mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, by każdy siedział pomiędzy osobami, których nie zna.

Rozwiązanie: Oznaczmy na płaszczyźnie siedem punktów reprezentujących siedem osób na wieczorku zapoznawczym. Niech relacja znajomości będzie odcinkiem, wówczas w każdym punkcie spotykają się dwa odcinki, a obraz relacji w grupie stanowi co najmniej jedna łamana zamknięta. Każdą taką łamaną zamkniętą nazywać będziemy cyklem.

Jest jasne, że każdy cykl obejmuje co najmniej trzech znajomych, zatem takich cykli nie może być więcej niż dwa. Z tego wynika, że możliwe są dwie sytuacje. W pierwszej mamy dwa cykle, jeden zawierający trzy, a drugi cztery osoby. W drugiej jest tylko jeden cykl, obejmujący wszystkich.



Rysunek 1



Rysunek 2

Powyższe rysunki dowodzą, że w każdej z powyższych sytuacji możliwe jest posadzenie gości przy stole w taki sposób, by żadne dwie siedzące obok siebie osoby się nie znały.

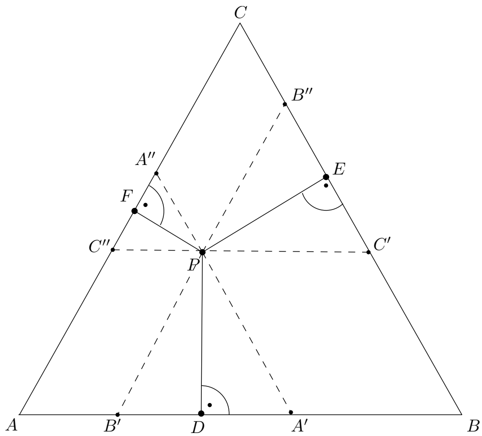
Zestaw C

Zadanie C1. Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz trójkąta równobocznego ABC. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P na boki odpowiednio AB, BC i AC. Wykazać, że wartość wyrażenia

$$\frac{|PD|+|PE|+|PF|}{|AD|+|BE|+|CF|}$$

nie zależy od wyboru punktu P i obliczyć ją.

Rozwiązanie: Poprowadźmy proste $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ równoległe do boków trójkąta ABC i przechodzące przez punkt P. Ponieważ kąty ACB i $AA''A'$ oraz CAB i $A''C''C'$ są kątami odpowiadającymi, zatem każdy z nich jest miary $60°$. Stąd trójkąt $A''C''P$ jest trójkątem równobocznym. Analogicznie dowodzimy także, że równoboczne są trójkąty $PB'A'$ i $PB''C'$.



Odcinek PD jest wysokością trójkąta równobocznego $PB'A'$, czyli $\frac{|PD|}{|B'A'|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Podobnie $\frac{|PE|}{|PC'|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $\frac{|PF|}{|C''P|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zauważmy, że z definicji prostych $C''C'$ oraz $A''A'$ wynika, że czworokąt $A'BC'P$ jest równoległobokiem. Stąd mamy, że $|C'P|=|A'B|$ oraz $|PC''|=|AB'|$, więc jeżeli $|AB|=a$, to

$$|PD|+|PE|+|PF|=\frac{\sqrt{3}}{2}(|B'A'|+|A'B|+|AB'|)=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Niech $|C''P|=x$, $|PC'|=y$ oraz $|AC''|=z$. Wtedy

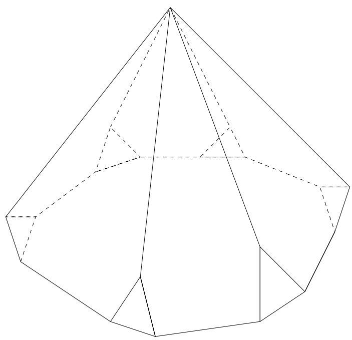
$$|AD|+|BE|+|CF|=x+\frac{z}{2}+z+\frac{y}{2}+y+\frac{x}{2}=\frac{3}{2}(x+y+z)=\frac{3}{2}a,$$

a zatem

$$\frac{|PD| + |PE| + |PF|}{|AD| + |BE| + |CF|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Zadanie C2. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielościan wypukły, którego liczba ścian i liczba wierzchołków są różnymi liczbami pierwszymi?

Rozwiązanie: Tak, taki wielościan istnieje. Weźmy ostrosłup o podstawie sześciokąta i obetnijmy wierzchołki przy jego podstawie. Powstaje widoczna na poniższym rysunku bryła, która, jak łatwo policzyć, ma 19 wierzchołków i 13 ścian.



Zadanie C3. Czy istnieje taka liczba naturalna n, że $\sqrt{n^2 + 7n + 13}$ jest liczbą naturalną? Uzasadnić odpowiedź.

Rozwiązanie: Przypuśćmy, że istnieje liczba naturalna m, dla której

$$\sqrt{n^2 + 7n + 13} = m.$$

Otrzymujemy wtedy $n^2 + 7n + 13 = m^2$. Zachodzą jednak nierówności

$$(n+3)^2 = n^2 + 6n + 9 < m^2 < n^2 + 8n + 16 = (n+4)^2.$$

Z tego wynika, że $n + 3 < m < n + 4$, co jest niemożliwe, gdyż m i n są liczbami naturalnymi. Otrzymujemy zatem sprzeczność, która dowodzi, że $\sqrt{n^2 + 7n + 13}$ nie może być liczbą naturalną.

Zadanie C4. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej n. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których zachodzi równość

$$n + S(n) + S\left(S(n)\right) + S\left(S\left(S(n)\right)\right) = 2017.$$

Rozwiązanie: Niech $a_0 + 10a_1 + 100a_2 + ...$ będzie zapisem dziesiętnym liczby n. Wówczas $n - S(n) = 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + ...$ jest liczbą podzielną przez 9, zatem n i $S(n)$ dają taką samą resztę z dzielenia przez 9.

Niech zatem reszta z dzielenia przez 9 każdego składnika sumy będzie równa k. Reszta z dzielenia liczby 2017 przez 9 jest równa 1, więc żądamy aby $4k$ dawało resztę 1 z dzielenia przez 9. Dla $0 \leqslant k \leqslant 8$ tylko $k = 7$ spełnia ten warunek. Zatem szukana liczba n przy dzieleniu przez 9 daje resztę 7.

Wówczas $S(n)$ może być jedną z trzech liczb: 7, 16 lub 25 (dla $n < 2017$ maksymalne $S(n)$ wynosi $S(1999) = 28$). Zatem $S(S(n)) = S(S(S(n))) = 7$. Mamy więc do rozwiązania równanie $n + S(n) = 2003$, co wobec wcześniejszych rozważań daje $n = 1978$, $n = 1987$ lub $n = 1996$. Bezpośrednio sprawdzamy, że tylko $n = 1978$ spełnia warunki zadania.

Zadanie C5. W pudełku znajduje się n kulek, przy czym $n > 0$. Ania i Bartek wykonują ruchy na przemian. Każdy rozgrywający może wyjąć z pudełka jedną, dwie lub pięć kulek. Wygrywa ten, kto pozostawi partnerowi puste pudełko. Dla jakich n Ania (gracz rozpoczynający) może zwyciężyć niezależnie od ruchów Bartka? Podać strategię Ani dla tych n.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez P zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3, a przez W – zbiór liczb naturalnych niepodzielnych przez 3. Udowodnimy, że jeśli liczba kulek w pudełku należy do zbioru W, to gracz wykonujący ruch wygrywa, a jeśli do P, to przegrywa – przy bezbłędnej grze z obu stron.

- Jeśli liczba kulek jest podzielna przez 3, to wyciągając 1, 2 lub 5 kulek pozostawiamy ich liczbę niepodzielną przez 3. Zatem, wykonując ruch z liczbą kulek w zbiorze P, zawsze oddajemy przeciwnikowi liczbę kulek należącą do W.

- Jeśli liczba kulek jest niepodzielna przez 3, to daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 3. Wyciągając odpowiednio 1 lub 2 kulki, możemy pozostawić w pudełku liczbę kulek podzielną przez 3. Zatem, wykonując ruch z liczbą kulek w zbiorze W, możemy oddać przeciwnikowi liczbę kulek należącą do P.

Oczywiście $0 \in P$. Z każdym ruchem kulek ubywa, zatem gra zawsze się skończy. Aby Ania wygrała, na początku gry musi znajdować się w pudełku liczba kul należąca do zbioru W, czyli niepodzielna przez 3. Wówczas Ania stosuje opisaną wyżej strategię.