ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

POZNAŃSKA FUNDACJA MATEMATYCZNA

III Wielkopolska Liga Matematyczna Juniorów

Poznań 2018 r.

Organizacja konkursu

Trzecia edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej Juniorów odbyła się w roku szkolnym 2017/2018. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLMJ, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Odbywały się w okresie od stycznia do marca 2018 r. Konkurs jest wzorowany na Wielkopolskiej Lidze Matematycznej adresowanej do uczniów szkół średnich. Od roku szkolnego 2017/2018 konkurs funkcjonuje pod nową nazwą i jest adresowany zarówno do uczniów wygaszanych oddziałów gimnazjalnych jak i do uczniów starszych klas szkół podstawowych.

Organizację Ligi wsparła Poznańska Fundacja Matematyczna, a także Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Informacja o przeprowadzaniu WLMJ dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zainteresowanymi. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlmj.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLMJ na Facebooku.

W konkursie wzięło udział 29 uczniów oddziałów gimnazjalnych oraz 13 uczniów ze szkół podstawowych. Uczniowie rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia, zestaw B do końca lutego, zestaw C do końca marca. Każdy zestaw składał się z 5 zadań z różnych działów matematyki. Rozwiązania zadań oceniane były przez Komisję WLMJ. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać od 0 do 10 punktów. W kilkanaście dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów, na stronie internetowej WLMJ ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie III WLMJ odbyło się 24 maja 2018 r. na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Uczestnicy, którzy rozwiązali najwięcej zadań, otrzymali nagrody książkowe oraz pamiątkowe dyplomy. Wszyscy obecni na zakończeniu mogli wysłuchać wykładu dra Bartłomieja Bzdęgi pod tytułem *Kwadraty magiczne*.

Komisja WLMJ

- Przewodniczący:
  mgr Przemysław Pela.
- Zespół oceniający prace uczestników:
  dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Piotr Berda, mgr Eliza Jackowska-Boryc, lic. Robert Kwieciński, mgr Przemysław Pela, mgr Joanna Stróżyk, mgr Tomasz Śliwiński.
- Zespół przygotowujący zadania konkursowe:
  dr Edyta Juskowiak, dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Piotr Berda, mgr Eliza Jackowska-Boryc, lic. Robert Kwieciński, mgr Przemysław Pela, mgr Joanna Stróżyk, mgr Tomasz Śliwiński.

Wyniki konkursu (oddziały szkół podstawowych)

Laureaci I stopnia

Jakub Wawrzyniak (87)
Uczeń 7 klasy Szkoły Podstawowej nr 56 im. Charles de Gaulle'a w Poznaniu.

Laureaci II stopnia

Natalia Siwek (81)
Uczennica 7 klasy Społecznej Szkoły Podstawowej nr 2 w Poznaniu.

Krystyna Cieluba (79)
Uczennica 7 klasy Szkoły Podstawowej nr 56 im. Charles de Gaulle'a w Poznaniu.

Laureaci III stopnia

Antoni Staniewski (69)
Uczeń 7 klasy Szkoły Podstawowej nr 56 im. Charles de Gaulle'a w Poznaniu.

Wyróżnieni

Paulina Czajkowska (45)
Uczennica 7 klasy Szkoły Podstawowej w Stęszewie.

Magda Wronecka (40)
Uczennica 7 klasy Szkoły Podstawowej nr. 67 im. Jacka Kuronia w Poznaniu.

Karol Okoń (36)
Uczeń 7 klasy Szkoły Podstawowej im. Jana Brzechwy w Rokietnicy.

Wyniki konkursu (oddziały gimnazjalne)

Laureaci I stopnia

Cezary Botta (148)
Uczeń III klasy oddziału gimnazjalnego Szkoły Podstawowej im. Jana Brzechwy w Rokietnicy.

Kosma Kasprzak (145)
Uczeń II klasy oddziału gimnazjalnego XXXVIII Dwujęzycznego Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Nowaka-Jeziorańskiego w Poznaniu.

Laureaci II stopnia

Maksym Ratajczyk (133)
Uczeń III klasy oddziału gimnazjalnego VII Liceum Ogólnokształcącego im. Dąbrówki w Poznaniu.

Laureaci III stopnia

Jakub Wachowiak (124)
Uczeń III klasy oddziału gimnazjalnego Szkoły Podstawowej im. Stanisława Staszica w Osieku nad Notecią.

Olaf Hofman (123)
Uczeń II klasy oddziału gimnazjalnego XXXVIII Dwujęzycznego Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Nowaka-Jeziorańskiego w Poznaniu.

Olga Kokorniak (120)
Uczennica III klasy oddziału gimnazjalnego XXXVIII Dwujęzycznego Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Nowaka-Jeziorańskiego w Poznaniu.

Kajetan Granopos (119)
Uczeń III klasy II Gimnazjum Społecznego Towarzystwa Oświatowego w Pile.

Wyróżnieni

Piotr Krzyszowski (105)
Uczeń III klasy Gimnazjum Dwujęzycznego im. Stanisława Staszica w Pleszewie.

Antoni Rajtar (104)
Uczeń II klasy oddziału gimnazjalnego Szkoły Podstawowej nr 2 im. Edwarda hr. Raczyńskiego w Komornikach.

Zuzanna Makowska (102)
Uczennica III klasy Społecznego Gimnazjum nr 1 STO w Poznaniu.

Jakub Piłat (91)
Uczeń II klasy oddziału gimnazjalnego Szkoły Podstawowej nr 2 im. Edwarda hr. Raczyńskiego w Komornikach.

Mikołaj Ciesielski (89)
Uczeń III klasy oddziału gimnazjalnego Zespołu Szkoły Podstawowej i Przedszkola Samorządowego z Oddziałem Integracyjnym w Kaszczorze.

Julia Bernaciak (87)
Uczennica II klasy oddziału gimnazjalnego Szkoły Podstawowej nr 56 im. Charlesa de Gaulle'a w Poznaniu.

Jan Nowakowski (79)
Uczeń II klasy oddziału gimnazjalnego Szkoły Podstawowej im. Arkadego Fiedlera w Połajewie.

Mateusz Dokowicz (75)
Uczeń III klasy oddziału gimnazjalnego Szkoły Podstawowej nr 5 im. Jana Pawła II w Luboniu.

Treści zadań wraz ze szkicami rozwiązań

Zestaw A

A1. Na lewej i prawej gałęzi pewnego drzewa siedziało łącznie 60 gołębi. Po godzinie zawiał mocny wiatr ze wschodu i połowa gołębi z prawej gałęzi przefrunęła na lewą. Po upływie kolejnej godziny wiatr zmienił kierunek i połowa gołębi z lewej gałęzi przefrunęła na gałąź prawą. Okazało się, że na każdej gałęzi siedzi teraz tyle samo ptaków, co na początku. Ile gołębi siedziało na każdej gałęzi na początku?

Rozwiązanie: Niech x oznacza liczbę gołębi, która siedziała na początku na prawej gałęzi. Wtedy na lewej gałęzi siedziało $60-x$ gołębi. Po pierwszej godzinie na prawej gałęzi zostało $\frac{1}{2}x$ gołębi, a na lewej siedziało ich $60 - \frac{1}{2}x$.
Po drugiej godzinie, do $\frac{1}{2}x$ gołębi siedzących na prawej gałęzi wróciła połowa lewej, czyli $\frac{1}{2}\left(60 - \frac{1}{2}x\right) = 30 - \frac{1}{4}x$ gołębi. Po tym ostatnim przelocie na prawej gałęzi było znów x gołębi – tyle, co na początku, – co pozwala ułożyć równanie

$$\frac{1}{2}x + 30 - \frac{1}{4}x = x.$$

Jego rozwiązaniem jest $x = 40$, więc na początku na prawej gałęzi siedziało 40 gołębi, a na lewej 20.

A2. Czy któryś z boków trójkąta może być krótszy od jego najkrótszej wysokości?

Rozwiązanie: Niech $a \leqslant b \leqslant c$ będą długościami boków trójkąta, zaś h_a, h_b i h_c odpowiednimi wysokościami. Ze wzoru na pole trójkąta mamy $\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, więc $h_a \geqslant h_b \geqslant h_c$. Wysokość jest najkrótszym odcinkiem łączącym wierzchołek trójkąta z prostą zawierającą podstawę, więc $h_c \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Zatem odpowiedź na postawione pytanie jest negatywna.

A3. Na osi liczbowej znajduje się pchła, która skacze zawsze o jednostkę w prawo lub w lewo. Na początku pchła znajduje się w punkcie 0 i wykonuje pierwszy skok na 1. Jeżeli pchła wskoczy na liczbę, na której jeszcze nie była, to zmienia kierunek (przykładowo, jeśli ostatni skok wykonała w lewą stronę, to następny wykona w prawą). W przeciwnym razie podąża dalej w tę samą stronę. W którym miejscu będzie pchła po 2018 skoku?

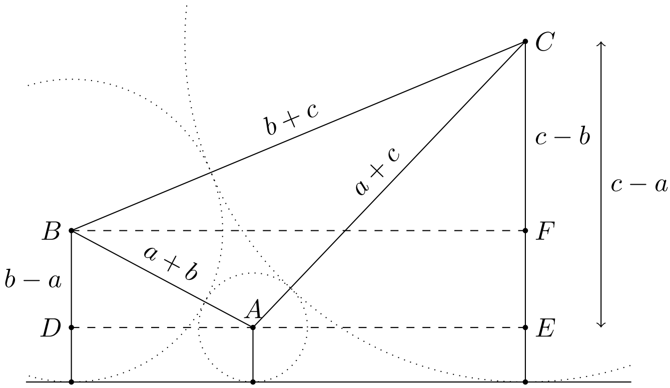
Rozwiązanie: Nietrudno zauważyć, że pchła wykonuje najpierw skok w prawo (z 0 na 1), następnie dwa skoki w lewo, potem trzy skoki w prawo, dalej cztery w lewo itd. Z równości $1+2+3+\ldots+63 = 2016$ wynika, że pchła wykona $1+3+5+\ldots+63$ skoki w prawo oraz $2+4+\ldots+62$ i jeszcze dwa w lewo. Zatem znajdzie się w punkcie

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 63 - (2 + 4 + \ldots + 62) - 2 = 30.$$

A4. Okręgi O_B i O_C o promieniach odpowiednio b i c są styczne zewnętrznie i leżą po tej samej stronie ich wspólnej stycznej ℓ. Okrąg O_A o promieniu a mniejszym niż b i c jest styczny zewnętrznie do okręgów O_B i O_C oraz do prostej ℓ. Udowodnić, że:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Rozwiązanie:



Bez straty ogólności niech $b \leqslant c$. Trójkąty ADB, AEC i BFC są prostokątne, ponieważ promień poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do stycznej. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla tych trójkątów, otrzymujemy:

- $x^2 + (b-a)^2 = (b+a)^2$, skąd $x = 2\sqrt{ab}$,
- $y^2 + (c-a)^2 = (c+a)^2$, skąd $y = 2\sqrt{ca}$,
- $(x+y)^2 + (c-b)^2 = (c+b)^2$, skąd $x + y = 2\sqrt{bc}$.

Zatem

$$2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ca} = x + y = 2\sqrt{bc}.$$

Dzieląc powyższą równość obustronnie przez $2\sqrt{abc}$ uzyskujemy tezę

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

A5. Liczba 234234234234... kończy się cyfrą 2, 3 lub 4. Czy ta liczba może być kwadratem liczby naturalnej?

Rozwiązanie: Zauważmy, że dwie ostatnie cyfry rozpatrywanej liczby tworzą liczbę 23, 34 lub 42. Zatem jej reszta z dzielenia przez 4 wynosi 2 lub 3. Dowolną liczbę naturalną można zapisać w postaci $2k$ lub $2k+1$ dla pewnej liczby całkowitej k. Z równości

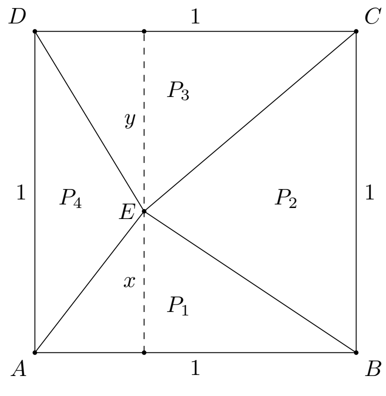
$$(2k)^2 = 4k^2 \qquad \text{i} \qquad (2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$$

wynika, że kwadrat liczby naturalnej daje przy dzieleniu przez 4 resztę 0 lub 1. Zatem nasza liczba nie może być kwadratem liczby naturalnej.

Zestaw B

B1. Punkt E jest punktem wewnętrznym kwadratu $ABCD$. Wykazać, że jeśli trójkąt AEB ma mniejsze pole niż trójkąt BEC, to trójkąt CED ma większe pole niż trójkąt DEA.

Rozwiązanie: Dla uproszczenia przyjmijmy, że bok kwadratu ma długość 1. Oznaczmy przez P_1, P_2, P_3 i P_4 pola trójkątów odpowiednio AEB, BEC, CED i DEA.



Wówczas

$$P_1 + P_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot y = \frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}$$

i analogicznie $P_2 + P_4 = \frac{1}{2}$. Wobec tego, jeżeli $P_1 < P_2$, to

$$P_3 = \frac{1}{2} - P_1 > \frac{1}{2} - P_2 = P_4,$$

co kończy dowód.

B2. Czy istnieje liczba trzycyfrowa, która jest równa podwojonemu iloczynowi swoich cyfr?

Rozwiązanie: Niech $\overline{abc}$ będzie poszukiwaną liczbą. Trzeba rozwiązać równanie

$$100a + 10b + c = 2abc,$$

w którym $a, b, c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ oraz $a \neq 0$. Przekształcając daną równość otrzymamy

$$a = \frac{10b + c}{2bc - 100},$$

z czego wynika, że $bc > 50$. Biorąc dodatkowo pod uwagę, że c jest parzyste, stwierdzamy, że $10b+c$ może być jedną z liczb: 78, 88, 96, 98. Stosując raz jeszcze powyższą równość, możemy obliczyć cyfrę a w każdym z tych czterech przypadków:

$$\frac{78}{2 \cdot 7 \cdot 8 - 100} = 6\frac{1}{2}, \qquad \frac{88}{2 \cdot 8 \cdot 8 - 100} = 3\frac{1}{7},$$

$$\frac{96}{2 \cdot 9 \cdot 6 - 100} = 12, \qquad \frac{98}{2 \cdot 9 \cdot 8 - 100} = 2\frac{5}{22}.$$

W żadnym nie otrzymaliśmy cyfry, zatem poszukiwana liczba trzycyfrowa nie istnieje.

B3. Piotr zebrał w lesie 3,1 kg grzybów. Cztery najcięższe ważyły łącznie 1 kg. Pięć najlżejszych również ważyło łącznie 1 kg. Ile grzybów zebrał Piotr?

Rozwiązanie: Podzielmy grzyby zebrane przez Piotra na trzy kategorie i obliczmy średnią masę grzyba w każdej z nich:

- lekkie (5 najlżejszych, łącznie 1 kg) – średnia $\frac{1}{5}$ kg,
- ciężkie (4 najcięższe, łącznie 1 kg) – średnia $\frac{1}{4}$ kg,
- przeciętne (x pozostałych, łącznie 1,1 kg) – średnia $\frac{1{,}1}{x}$ kg.

Jest jasne, że $\frac{1}{5} \leqslant \frac{1{,}1}{x} \leqslant \frac{1}{4}$. Z tych nierówności wynika, że

$$x \geqslant \frac{4}{1{,}1} > 3 \quad \text{oraz} \quad x \leqslant \frac{5}{1{,}1} < 5.$$

Liczba x jest naturalna, zatem $x = 4$ i Piotr zebrał $5 + 4 + x = 13$ grzybów.

B4. Wiadomo, że $a+b+c=2018$ oraz $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{1}{2018}$. Obliczyć wartość wyrażenia

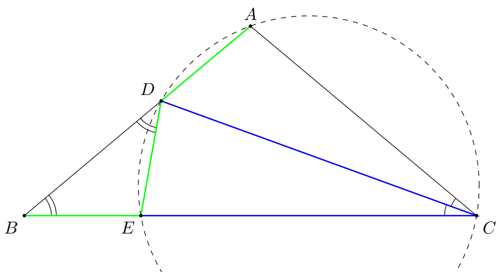
$$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}.$$

Rozwiązanie: Wszystko wyjaśnia poniższy rachunek:

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=\\
&=\frac{(a+b+c)-(a+b)}{a+b}+\frac{(a+b+c)-(b+c)}{b+c}+\frac{(a+b+c)-(c+a)}{c+a}=\\
&=\frac{a+b+c}{a+b}-1+\frac{a+b+c}{b+c}-1+\frac{a+b+c}{c+a}-1=\\
&=(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3=\\
&=2018\cdot\frac{1}{2018}-3=1-3=-2.
\end{aligned}$$

B5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|\sphericalangle BAC|=100^\circ$. Dwusieczna kąta ACB przecina odcinek AB w punkcie D. Udowodnić, że $|CD|+|DA|=|BC|$.

Rozwiązanie: Wybierzmy na odcinku BC taki punkt E, dla którego $|CE|=|CD|$. Wtedy $|\sphericalangle DEC|=|\sphericalangle EDC|=80^\circ$, więc $|\sphericalangle DEC|+|\sphericalangle DAC|=180^\circ$, czyli na czworokącie $ACED$ można opisać okrąg.



Łuki AD i DE okręgu opisanego na czworokącie $ACED$ mają równą długość, gdyż zachodzi równość odpowiednich kątów wpisanych – $|\sphericalangle ACD|=|\sphericalangle DCE|$. Zatem $|AD|=|DE|$. Dalej

$$|\sphericalangle BDE|=180^\circ-|\sphericalangle ADE|=|\sphericalangle ACE|=|\sphericalangle ABC|,$$

więc $|BE|=|DE|=|AD|$. To prowadzi do wniosku, że

$$|AD|+|CD|=|BE|+|CE|=|CB|,$$

co kończy dowód.

Zestaw C

C1. Niech $\overline{pq}$ oznacza dwucyfrową liczbę całkowitą z cyfrą dziesiątek p oraz jedności q. Dla jakich cyfr $a, b, c > 0$ wartości ilorazów $\overline{ab} : \overline{ba}$ oraz $\overline{bc} : \overline{cb}$ są równe i jednocześnie różne od 1?

Rozwiązanie: Rozważamy tu równanie

$$\frac{10a+b}{10b+a} = \frac{10b+c}{10c+b},$$

w którym a, b i c są liczbami ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

Mnożąc każdą stronę równania przez $(10b+a)(10c+b)$, otrzymujemy

$$(10a+b)(10c+b) = (10b+c)(10b+a),$$

skąd

$$100ac + 10(ab+bc) + b^2 = 100b^2 + 10(ab+bc) + ac,$$

więc

$$100ac + b^2 = 100b^2 + ac.$$

Zatem $ac = b^2$. Zauważmy, że $a \neq b$, bo $\overline{ab} : \overline{ba} \neq 1$. Pamiętając, że a, b oraz c są liczbami całkowitymi od 1 do 9, dostajemy wartości takie jak w tabelce

a	1	4	1	9	2	8	4	9
b	2	2	3	3	4	4	6	6
c	4	1	9	1	8	2	9	4

Na koniec sprawdzamy, że faktycznie zachodzą równości:

$$\frac{12}{21} = \frac{24}{42}, \qquad \frac{13}{31} = \frac{39}{93}, \qquad \frac{24}{42} = \frac{48}{84}, \qquad \frac{46}{64} = \frac{69}{96}.$$

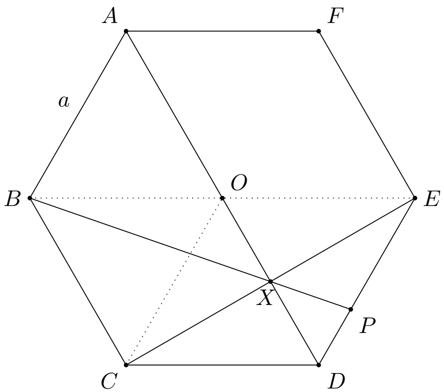
Zatem warunki zadania spełnia osiem trójek (a, b, c), które przedstawiono wyżej w tabeli.

C2. Gra polega na wypisywaniu na przemian przez dwóch graczy kolejnych cyfr dowolnej liczby 18-cyfrowej. Jeżeli otrzymana liczba jest podzielna przez 9, to wygrywa osoba rozpoczynająca grę, w przeciwnym razie wygrywa drugi gracz. Obowiązują następujące reguły: 1) pierwsza cyfra nie może być zerem; 2) po cyfrze różnej od 9 można napisać tylko cyfrę większą; 3) po cyfrze 9 można wpisać dowolną cyfrę. Który gracz ma strategię wygrywającą i jaka ona jest?

Rozwiązanie: Pokażemy strategię wygrywającą dla pierwszego gracza. Pierwszy gracz pisze cyfrę 8, drugi musi napisać 9. Wówczas pierwszy może zgodnie z regułami napisać dowolną cyfrę i znów pisze 8, zmuszając przeciwnika do napisania 9. Sytuacja powtarza się aż do napisania ostatniej cyfry przez drugiego gracza. Suma cyfr zapisanej liczby to $9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 = 9 \cdot (9 + 8) = 9 \cdot 17$. Zatem liczba jest podzielna przez 9 i pierwszy gracz wygrywa.

C3. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Na odcinku DE wybrano taki punkt P, że odcinki AD, CE i BP przecinają się w jednym punkcie. Który z odcinków jest dłuższy: DP czy EP?

Rozwiązanie: Niech X bedzie punktem przecięcia odcinków AD, CE i BP, zaś O środkiem sześciokąta. Główne przekątne sześciokąta dzielą go na trójkąty równoboczne. Oznaczmy przez a długość boku sześciokąta.



Czworokąt $CDEO$ jest rombem, więc X jest środkiem odcinka DO, zatem $|AX| = 3|DX|$. Proste AB i DE są równoległe, więc trójkąty ABX i DPX są podobne. Z tego wynika, że

$$\frac{|DP|}{|AB|} = \frac{|DX|}{|AX|} = \frac{1}{3},$$

więc $|DP| = \frac{1}{3}a$ i $|EP| = \frac{2}{3}a$. Wobec tego $|EP| > |DP|$.

C4. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb naturalnych (a, b, c), w których a, b i c są długościami boków trójkąta prostokątnego o polu równym $a + b + c$ oraz spełnione są nierówności $a < b < c$.

Rozwiązanie: Mamy $a^2 + b^2 = c^2$ oraz $\frac{1}{2}ab = a + b + c$. Z tych równości wynika, że

$$4(a^2 + b^2) = 4c^2 = (2c)^2 = (ab - 2a - 2b)^2.$$

Po uproszczeniu otrzymamy $ab - 4(a + b) + 8 = 0$, co jest równoważne równości

$$(a - 4)(b - 4) = 8.$$

Liczbę 8 można zapisać w postaci iloczynu liczb całkowitych na cztery sposoby:

$$8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4 = (-1) \cdot (-8) = (-2) \cdot (-4).$$

Tylko pierwsze dwa dają dodatnie a i b. Stąd już łatwo wyznaczyć tójki (a, b, c) – są to $(5, 12, 13)$ oraz $(6, 8, 10)$. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że spełniają one żądane równości.

C5. Z kostek domina 2×1 zbudowano kwadrat $n \times n$. Następnie usuwano kolejno po jednej kostce sąsiadującej z przynajmniej trzema innymi, jeszcze nie usuniętymi kostkami. Czynność tę powtarzano, dopóki było to możliwe. Dowieść, że na końcu pozostało przynajmniej $\frac{2}{3}n$ kostek. *Uwaga.* Kostki sąsiadują, jeżeli mają przynajmniej jedną jednostkę wspólnego brzegu.

Rozwiązanie: Niech usuwana kostka sąsiaduje z innymi wzdłuż brzegu o długości d, przy czym $d \geqslant 3$, bo inaczej nie można usunąć kostki. Wtedy pozostała część brzegu tej kostki ma długość $6 - d$. Usuwając tę kostkę, zmienimy brzeg figury lub figur, które tworzą kostki. Obwód zmaleje o $6 - d$ i wzrośnie o d, czyli w sumie wzrośnie o $6 - 2d \geqslant 0$.
Zatem podczas usuwania kostek nie może zmaleć obwód figury (figur) zbudowanej z kostek. Na początku wynosi on $4n$. Jeżeli na końcu zostało k kostek, to obwód figur, które tworzą jest nie mniejszy niż $6k$. Wyżej dowiedziona własność obwodu daje nam zatem nierówność $6k \geqslant 4n$, czyli $k \geqslant \frac{2}{3}n$.