ODDZIAŁ POZNAŃSKI
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

IV Wielkopolska Liga Matematyczna Juniorów

Poznań 2019 r.

Organizacja konkursu

Czwarta edycja Wielkopolskiej Ligi Matematycznej Juniorów odbyła się w roku szkolnym 2018/2019. Zawody zostały zorganizowane przez Komisję WLMJ, powołaną przez Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Odbywały się w okresie od stycznia do marca 2019 r. Konkurs jest wzorowany na Wielkopolskiej Lidze Matematycznej adresowanej do uczniów szkół średnich. W roku szkolnym 2018/2019 konkurs był adresowany zarówno do uczniów wygaszanych oddziałów gimnazjalnych jak i do uczniów starszych klas szkół podstawowych.

Informacja o przeprowadzaniu WLMJ dotarła do uczestników poprzez kontakt z nauczycielami, dyrekcjami szkół oraz z samymi zainteresowanymi. Źródłem aktualnych informacji jest strona internetowa *wlmj.wmi.amu.edu.pl*, a także profil WLMJ na Facebooku.

W konkursie wzięło udział 6 uczniów oddziałów gimnazjalnych oraz 24 uczniów ze szkół podstawowych. Uczniowie rozwiązywali 3 zestawy zadań konkursowych: zestaw A do końca stycznia, zestaw B do końca lutego, zestaw C do końca marca. Każdy zestaw składał się z 6 zadań z różnych działów matematyki, przy czym zadania od 1 do 4 były przeznaczone dla uczniów szkół podstawowych, a zadania od 3 do 6 – dla gimnazjalistów. Rozwiązania zadań oceniane były przez Komisję WLMJ. Za rozwiązanie każdego z zadań można było otrzymać od 0 do 10 punktów. W kilka dni po zakończeniu terminu nadsyłania rozwiązań każdego z zestawów, na stronie internetowej WLMJ ukazywał się aktualny ranking uczestników.

Zakończenie IV WLMJ odbyło się 21 maja na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Uczestnicy, którzy rozwiązali najwięcej zadań, otrzymali nagrody książkowe. Zakończenie uświetnił wykład prof. Krzysztofa Pawałowskiego, współzałożyciela WLM.

Komisja WLMJ

- **Przewodniczący:**

  mgr Przemysław Pela.

- **Zespół oceniający prace uczestników:**

  dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Piotr Berda, dr Eliza Jackowska-Boryc, mgr Agnieszka Kukla, mgr Piotr Mizerka, mgr Przemysław Pela, mgr Joanna Stróżyk, mgr Tomasz Śliwiński.

- **Zespół przygotowujący zadania konkursowe:**

  dr Edyta Juskowiak, dr Bartłomiej Bzdęga, mgr Piotr Berda, dr Eliza Jackowska-Boryc, mgr Piotr Mizerka, mgr Przemysław Pela, mgr Joanna Stróżyk, mgr Tomasz Śliwiński.

Wyniki konkursu (oddziały gimnazjalne)

Laureat I stopnia

Olaf Hofman (90 pkt.)
Uczeń 3 klasy oddział gimnazjalnego XXXLVIII Dwujęzycznego LO w Poznaniu.

Laureat II stopnia

Dorian Gabler (90 pkt.)
Uczeń 3 klasy Gimnazjum im. KEN w Warszawie.

Laureat III stopnia

Mikołaj Szumlański (90 pkt.)
Uczeń 3 klasy oddział gimnazjalnego Szkoły Podstawowej nr 1 w Wągrowcu.

Wyniki konkursu (oddziały szkół podstawowych)

Laureaci I stopnia

Jakub Wawrzyniak (117 pkt.)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej nr 56 w Poznaniu.

Klara Hofman (115 pkt.)
Uczenica 7 klasy Szkoły Podstawowej nr 3 w Luboniu.

Laureaci II stopnia

Aleksandra Strzelecka (104 pkt.)
Uczenica 8 klasy Niepublicznej Szkoły Podstawowej w Wilkowyi.

Paulina Czajkowska (97 pkt.)
Uczennica 8 klasy Szkoły Podstawowej w Stęszewie.

Natalia Siwek (92 pkt.)
Uczennica 8 klasy Społecznej Szkoły Podstawowej nr 2 w Poznaniu.

Laureaci III stopnia

Krystyna Cieluba (83 pkt.)
Uczennica 8 klasy Szkoły Podstawowej nr 56 w Poznaniu.

Dawid Bugajewski (81 pkt.)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej w Czempiniu.

Kacper Paterski (79 pkt.)
Uczeń 7 klasy Zespołu Przedszkolno-Szkolnego w Kołaczkowie.

Maja Komorowska (72 pkt.)
Uczeń 7 klasy Zespołu Przedszkolno-Szkolnego nr 9 w Poznaniu.

Antoni Staniewski (70 pkt.)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej nr 56 w Poznaniu.

Wyróżnieni

Krzysztof Pędzich (55 pkt.)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej w Stęszewie.

Marcin Krzewiński (53 pkt.)
Uczeń 7 klasy Szkoły Podstawowej nr 2 w Skórzewie.

Magdalena Siwek (52 pkt.)
Uczennica 6 klasy Szkoły Podstawowej nr 93 w Poznaniu.

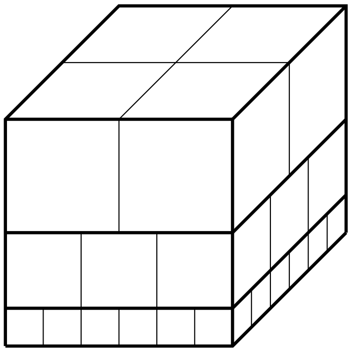
Marcel Śniegowski (41 pkt.)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej nr 2 w Skórzewie.

Jakub Stachowski (40 pkt.)
Uczeń 8 klasy Szkoły Podstawowej nr 2 w Skórzewie.

Szkice rozwiązań zadań

A1. Czy sześcian można rozciąć na 49 mniejszych sześcianów? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie. Taki podział jest możliwy, można go zrealizować w następujący sposób. Ustalmy, że długość krawędzi sześcianu wynosi 6 jednostek. Dzielimy sześcian na trzy warstwy, o grubościach kolejno 3, 2 i 1.



Następnie pierwszą warstwę rozcinamy na 4 sześciany o krawędzi 3, drugą na 9 sześcianów o krawędzi 2, a trzecią na 36 sześcianów o krawędzi 1. Łącznie otrzymaliśmy 49 sześcianów.

A2. Na przyjęcie przyszła pewna liczba gości, pomiędzy 50 a 150. Gospodarz postanowił usadzić ich po cztery osoby przy każdym stole, ale nie udało się to, ponieważ jedna osoba musiała wtedy usiąść sama. Spróbował po pięć – również pozostała jedna osoba. Ostatecznie goście usiedli w pięć osób przy jednym stole, a po sześć przy kilku innych.
Ilu gości było na tym przyjęciu?

Rozwiązanie. Niech n oznacza liczbę osób obecnych na przyjęciu. Z treści zadania wynika, że liczba n daje resztę 1 z dzielenia przez 4 i 5, zatem liczba $n-1$ dzieli się przez 4 i 5 – czyli dzieli się przez $\mathtt{NWW}(4,5) = 20$. Z powyższej obserwacji oraz z nierówności $50 \leqslant n \leqslant 150$ wnioskujemy, że n jest jedną z liczb:

$$61,\ 81,\ 101,\ 121,\ 141.$$

Pozostał do sprawdzenia jeszcze jeden warunek – liczba $n-5$ dzieli się przez 6. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że z powyższych liczb jedynie 101 posiada tę własność.

Odpowiedź: Na przyjęciu było 101 gości.

A3. Wyznaczyć wszystkie trójki (x, y, z) liczb naturalnych, które spełniają równość

$$3^x + 3^y + 3^z = 3^{2019}.$$

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że jeśli co najmniej jedna z niewiadomych jest większa lub równa 2019, to $3^x + 3^y + 3^z > 3^{2019}$. Stąd, ponieważ liczby x, y i z są naturalne, mamy $x, y, z \leqslant 2018$. Z tego wynika, że

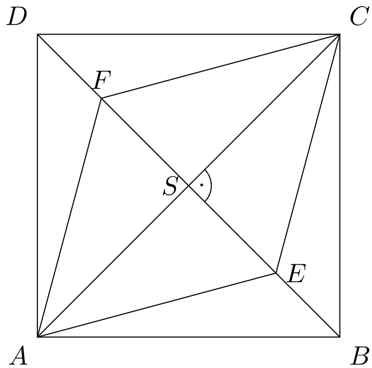
$$3^x + 3^y + 3^z \leqslant 3^{2018} + 3^{2018} + 3^{2018} = 3 \cdot 3^{2018} = 3^{2019}.$$

W takim razie, aby w miejscu „$\leqslant$" zachodziła równość, musi być $x = y = z = 2018$.

Odpowiedź: Równanie spełnia tylko jedna trójka – $(2018, 2018, 2018)$.

A4. Na przekątnej BD prostokąta $ABCD$ wybrano takie punkty E i F, że czworokąt $AECF$ jest rombem o kącie ostrym $60°$ i polu P. Wykazać, że pole prostokąta $ABCD$ jest równe $P\sqrt{3}$.

Rozwiązanie. Przekątne rombu są prostopadłe, więc $AC \perp EF$, tym samym $AC \perp BD$. Czworokąt $ABCD$ jest wobec tego prostokątem o prostopadłych przekątnych, czyli kwadratem. Zauważmy też, że $|\sphericalangle EAF| < |\sphericalangle BAD| = 90°$, więc $\sphericalangle EAF$ jest kątem ostrym rombu $AECF$. Zatem z treści zadania $|\sphericalangle EAF| = 60°$. W trójkącie AEF zachodzi ponadto równość $|AE| = |AF|$, gdyż romb $AECF$ ma boki równej długości. Zatem trójkąt AEF jest równoboczny.



Odcinek AS jest wysokością trójkąta AEF, więc $|AS| = \frac{\sqrt{3}}{2}|EF|$, czyli $|EF| = \frac{2}{\sqrt{3}}|AS|$. Pole rombu $AECF$ jest równe

$$P = \frac{1}{2}|AC| \cdot |EF| = \frac{1}{2}|AC| \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}|AS| = \frac{|AC| \cdot |AS|}{\sqrt{3}}.$$

Kwadrat $ABCD$ też jest rombem, więc do obliczenia jego pola można posłużyć się wzorem

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = |AS| \cdot |BD| = |AS| \cdot |AC| = P\sqrt{3},$$

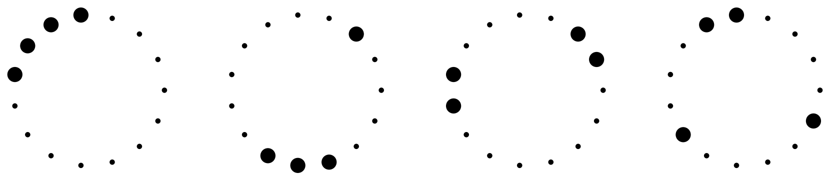
co kończy dowód.

A5. Spośród wierzchołków 15-kąta foremnego chcemy wybrać takie cztery, z których każde dwa są końcami pewnej jego przekątnej. Na ile sposobów można to zrobić?

Rozwiązanie. Obliczymy, ile jest wszystkich możliwości wyboru czterech wierzchołków 15-kąta, a następnie odejmiemy te, które nie spełniają warunków zadania.

Wybierając 4 wierzchołki spośród 15, pierwszy możemy wybrać na 15 sposobów, drugi na 14, trzeci na 13, a czwarty na 12 – to na mocy reguły mnożenia daje $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$ możliwości. Należy jeszcze ten wynik podzielić przez liczbę sposobów uporządkowania czterech wierzchołków, ponieważ kolejność nie ma tu znaczenia. Podsumowując, 4 wierzchołki z 15 można wybrać na $\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1365$ sposobów.

W tych czwórkach wierzchołków, które nie spełniają warunków zadania, znajduje się co najmniej jedna para wierzchołków będących końcami pewnego boku 15-kąta. Takie wierzchołki będziemy w skrócie nazywać sąsiednimi. Aby policzyć te czwórki, rozważymy cztery przypadki.



I *II* *III* *IV*

Przypadek I – cztery wierzchołki pod rząd. Tu mamy 15 możliwości.

Przypadek II – trzy wierzchołki z rzędu i jeden izolowany. Trójkę kolejnych wierzchołków można wybrać na 15 sposobów, czwarty, izolowany, na dziesięć. To daje $15 \cdot 10 = 150$ możliwości.

Przypadek III – dwie pary sąsiednich wierzchołków. Pierwszą parę można wybrać na 15 sposobów, drugą na 10, co daje łącznie $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 = 75$ sposobów (czynnik $\frac{1}{2}$ bierze się stąd, że w rachunku $15 \cdot 10$ każde ustawienie liczone jest dwukrotnie – każda z par występuje raz jako pierwsza, raz jako druga).

Przypadek IV – jedna para sąsiednich wierzchołków i dwa wierzchołki izolowane. Parę sąsiednich wierzchołków można wybrać na 15 sposobów. Położenie dwóch wierzchołków izolowanych określimy za pomocą pary liczb (a, b), gdzie a oznacza liczbę niewybranych wierzchołków pomiędzy parą a wierzchołkiem izolowanym, idąc od pary przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, zaś b – zgodnie. Dla jasności, rysunkowi IV odpowiada para $(3,4)$. Liczby a i b są całkowite dodatnie i muszą spełniać warunek $a+b \leqslant 10$. Jest jedna taka para o sumie $a+b=2$, dwie o sumie 3, trzy o sumie 4 i tak dalej. To daje łącznie $1+2+\ldots+9=45$ par (a,b), zatem przypadek IV obejmuje $15 \cdot 45 = 675$ możliwości.

Podsumowując, mamy 1365 wszystkich czwórek wierzchołków, z których $15+150+75+675=915$ nie spełnia warunków zadania. Stąd szukanych czwórek jest $1365-915=450$.

Odpowiedź: Wyboru można dokonać na 450 sposobów.

Uwaga. W pierwszej części rozwiązania można skorzystać z gotowego wzoru na liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego. Jest ona równa $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

A6. Pewna liczba naturalna 2019-cyfrowa jest równa sumie k-tych potęg jej cyfr. Dowieść, że $k > 2019$.

Rozwiązanie. Niech n będzie liczbą z zadania, natomiast $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ jej cyframi. Wówczas

$$n = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_{2019}^k \leqslant \underbrace{9^k + 9^k + \ldots + 9^k}_{\text{2019 składników}} = 2019 \cdot 9^k.$$

Z drugiej strony, liczba n jest 2019-cyfrowa, więc $n \geqslant 10^{2018}$. To nam daje nierówność

$$2019 \cdot 9^k \geqslant 10^{2018}.$$

Przypuśćmy, że wbrew tezie $k \leqslant 2019$. To prowadzi do nierówności

$$2019 \cdot 9^{2019} \geqslant 2019 \cdot 9^k \geqslant 10^{2018},$$

lub równoważnie $\left(\frac{10}{9}\right)^{2018} \leqslant 9 \cdot 2019$. Ale przecież $9^7 = 4782969$, więc $\left(\frac{10}{9}\right)^7 > 2$, zatem

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{2018} > \left(\frac{10}{9}\right)^{7 \cdot 20} > 2^{20} > 9 \cdot 2019.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $k > 2019$.

Uwaga. Rozwiązanie nieco ułatwia znajomość logarytmów. Biorąc obustronnie logarytm dziesiętny z nierówności $2019 \cdot 9^k \geqslant 10^{2018}$, otrzymamy $\log 2019 + k \log 9 \geqslant 2018$, co daje $k \geqslant \frac{2018 - \log 2019}{\log 9} \approx 2111{,}30278 > 2019$.

B1. Na tablicy napisano cztery liczby. Jeśli zmażemy pierwszą z nich, suma pozostałych wynosić będzie 42. Suma pozostałych wyniesie 40, jeśli zmażemy drugą, 38 jeśli trzecią, a 36 jeśli czwartą. Wyznaczyć te liczby.

Rozwiązanie. Niech a, b, c i d będą szukanymi liczbami. Z treści zadania mamy

$$b+c+d=42, \qquad a+c+d=40, \qquad a+b+d=38, \qquad a+b+c=36.$$

Dodając stronami wszystkie cztery równości, otrzymamy $3a+3b+3c+3d=156$, więc

$$a+b+c+d=52.$$

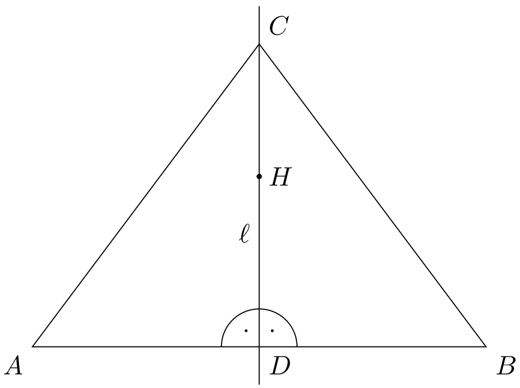
Teraz wystarczy obliczyć

$$\begin{aligned} a&=(a+b+c+d)-(b+c+d)=52-42=10,\\ b&=(a+b+c+d)-(a+c+d)=52-40=12,\\ c&=(a+b+c+d)-(a+b+d)=52-38=14,\\ d&=(a+b+c+d)-(a+b+c)=52-36=16. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Te liczby to 10, 12, 14 i 16.

B2. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Przez punkt H przechodzi symetralna odcinka AB. Udowodnić, że trójkąt ABC jest równoramienny.

Rozwiązanie. Skorzystamy z faktu, że jeśli mamy dany punkt i prostą, to istnieje tylko jedna prosta, która przechodzi przez dany punkt i jest prostopadła do danej prostej. Symetralna ℓ odcinka AB oraz wysokość CD trójkąta ABC przechodzą przez punkt H i są prostopadłe do AB, więc proste ℓ i CD się pokrywają.



Wobec tego punkt D jest środkiem odcinka AB. Mamy zatem $|AD|=|BD|$ oraz $|\sphericalangle ADC|=|\sphericalangle BDC|=90^\circ$. Trójkąty ADC i BDC są więc przystające (bkb), czyli $|AC|=|BC|$. Trójkąt ABC jest zatem równoramienny.

B3. Niech $P(n)$ oznacza iloczyn cyfr liczby naturalnej n, na przykład $P(334) = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ lub $P(207) = 2 \cdot 0 \cdot 7 = 0$. Obliczyć sumę

$$P(1) + P(2) + P(3) + \ldots + P(2019).$$

Rozwiązanie. Niech S_k oznacza sumę iloczynów wszystkich liczb k-cyforwych dla naturalnych $k \geqslant 1$. Wtedy $S_1 = 0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Liczby $(k+1)$-cyfrowe powstają z k-cyfrowych przez dopisanie na ich końcu jednej z cyfr: $0, 1, 2, \ldots, 9$. Wobec tego

$$S_{k+1} = 0S_k + 1S_k + 2S_k + \ldots + 9S_k = 45S_k$$

dla naturalnych $k \geqslant 1$. Z tego wynika, że $S_2 = 45^2$ i $S_3 = 45^3$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned}
P(1) + P(2) + \ldots + P(9) &= 45, \\
P(10) + P(11) + \ldots + P(99) &= 45^2, \\
P(100) + P(101) + \ldots + P(999) &= 45^3, \\
P(1000) + P(1001) + \ldots + P(1099) &= 0, \\
P(1100) + P(1101) + \ldots + P(1999) &= 1 \cdot 45^3, \\
P(2000) + P(2001) + \ldots + P(2019) &= 0.
\end{aligned}$$

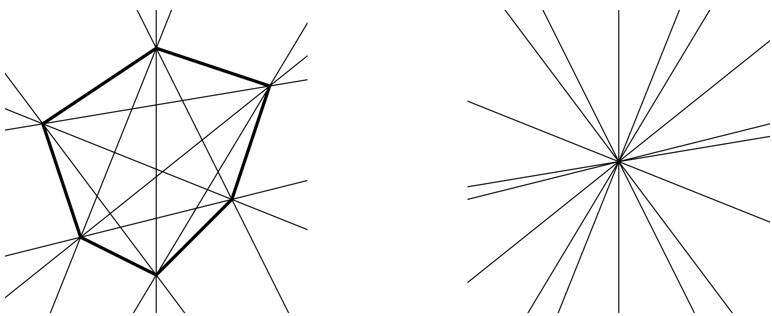
Otrzymaliśmy

$$P(1) + P(2) + \ldots + P(2019) = 45 + 45^2 + 2 \cdot 45^3 = 184320.$$

Odpowiedź: Szukana suma wynosi 184320.

B4. Dany jest sześciokąt wypukły, w którym żadne dwie przekątne nie są równoległe. Udowodnić, że proste zawierające pewne dwie przekątne tego sześciokąta przecinają się pod kątem o mierze co najwyżej $25°$.

Rozwiązanie. Jeśli przesuniemy prostą równolegle, to miary kątów, które ona tworzy z pozostałymi prostymi, pozostaną bez zmian. Możemy zatem wszystkie proste zawierające przekątne sześciokąta przesunąć równolegle w taki sposób, by przechodziły one przez jeden wspólny punkt.



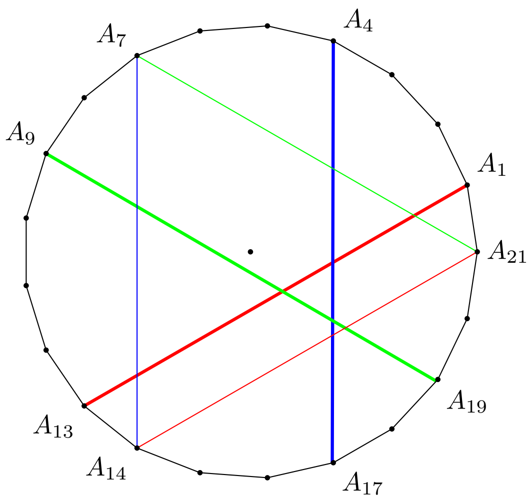
Dziewięć prostych przechodzących przez jeden wspólny punkt dzieli płaszczyznę na 18 kątów o wspólnym wierzchołku. Kąty te odpowiadają niektórym kątom pomiędzy przekątnymi sześciokąta. Suma ich miar wynosi $360°$. Gdyby wszystkie miały miarę większą niż $25°$, to otrzymalibyśmy sprzeczność, gdyż $18 \cdot 25° > 360°$. Zatem któryś z nich ma miarę nieprzekraczającą $25°$.

B5. Dwudziestojednokąt $A_1A_2A_3 \ldots A_{21}$ jest foremny. Dowieść, że przekątne A_1A_{13}, A_4A_{17} i A_9A_{19} przecinają się w trzech punktach, które są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Rozwiązanie. Ze względu na symetrie dwudziestojednokąta foremnego, zachodzą następujące równoległości:

$$A_1A_{13} \parallel A_{21}A_{14}, \qquad A_4A_{17} \parallel A_7A_{14}, \qquad A_9A_{19} \parallel A_7A_{14}.$$

Z tego wynika, że kąty w trójkącie wyznaczonym przez dane w zadaniu przekątne mają takie same miary, co kąty trójkąta $A_7A_{14}A_{21}$.



Trójkąt $A_7A_{14}A_{21}$ jest równoboczny, zatem dowód jest zakończony.

B6. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 + |y-z| &= yz + 1 \\ y^2 + |z-x| &= zx + 1 \\ z^2 + |x-y| &= xy + 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Ze względu na symetryczność układu, można bez utraty ogólności przyjąć, że $x \leqslant y \leqslant z$. Wówczas otrzymamy układ

$$\begin{cases} x^2 + z - y &= yz + 1 \\ y^2 + z - x &= zx + 1 \\ z^2 + y - x &= xy + 1. \end{cases}$$

Odejmując drugie równanie od pierwszego, otrzymamy

$$x^2 + z - y - y^2 - z + x = yz + 1 - zx - 1,$$

a po przekształceniach $(x + y + z + 1)(x - y) = 0$, więc

$$x + y + z = -1 \qquad \text{lub} \qquad x = y.$$

Postępując analogicznie z równaniem drugim i trzecim, dojdziemy do wniosku, że

$$x + y + z = 1 \qquad \text{lub} \qquad y = z.$$

Zauważmy, że równości $x = y$ i $y = z$ nie mogą być jednocześnie spełnione, gdyż wówczas otrzymalibyśmy w pierwszym równaniu układu sprzeczność $0 = 1$. Mamy zatem do rozważenia dwa przypadki:

Przypadek I – zachodzą równości $x + y + z = -1$ i $y = z$. Wtedy $x = -1 - 2y$. Podstawiając do pierwszego równania układu, otrzymamy

$$(-1 - 2y)^2 + |y - y| = yy + 1.$$

Po uproszczeniu $y(3y + 4) = 0$, więc $y = 0$ lub $y = -\frac{4}{3}$. Jeśli $y = 0$, to $z = 0$ i $x = -1$ – ta trójka spełnia wyjściowy układ równań. Jeżeli $y = -\frac{4}{3}$, to $x = \frac{5}{3} > y$ – sprzeczność z założeniem $x \leqslant y$.

Przypadek II – tutaj $x + y + z = 1$ oraz $x = y$. Zatem $z = 1 - 2y$ i wstawiając te wartości do pierwszego równania układu, otrzymamy

$$(1 - 2y)^2 + |y - y| = yy + 1.$$

Po uproszczeniu $y(3y-4) = 0$, więc $y = 0$ lub $y = \frac{4}{3}$. Jeśli $y = 0$, to $x = 0$ i $z = 1$ – ta trójka spełnia wyjściowy układ równań. Jeżeli $y = \frac{4}{3}$, to $z = -\frac{5}{3} < y$ – sprzeczność z założeniem $z \geqslant y$.

Na koniec uwalniamy się od założenia $x \leqslant y \leqslant z$ – przy każdym innym porządku niewiadomych rozwiązanie jest analogiczne. Ostatecznie układ spełnia sześć trójek (x, y, z):

$$(0, 0, 1), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1), \quad (0, 0, -1), \quad (0, -1, 0), \quad (0, 0, -1).$$

C1. Wyznaczyć najmniejszą dodatnią wielokrotność liczby 72, w której zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry 0 i 1.

Rozwiązanie. Rozważmy wszystkie liczby podzielne przez 72, w których zapisie dziesiętnym występują tylko zera i jedynki. Równoważnie, takie liczby dzielą się przez 8 i 9, ponieważ $8 \cdot 9 = 72$ oraz $\mathtt{NWD}(8,9) = 1$. Wobec tego rozważane liczby są definiowane przez następujące warunki:

1. liczba utworzona z trzech ostatnich cyfr tej liczby dzieli się przez 8, czyli trzy ostatnie cyfry są zerami,

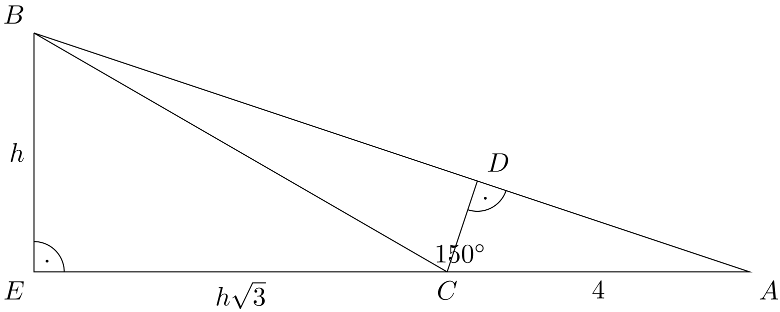
2. suma cyfr tej liczby dzieli się przez 9, czyli liczba jedynek w jej zapisie jest wielokrotnością dziewiątki.

Najmniejszą liczbą spełniającą te dwa warunki jest 111111111000.

Odpowiedź: Szukaną liczbą jest 111111111000.

C2. W trójkącie ABC dane są $|AC| = 4$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 150°$. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta, przy czym spełniona jest równość $|AD| = 3|CD|$. Obliczyć długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka B.

Rozwiązanie. Niech $|BE| = h$. Mamy $|\sphericalangle ECB| = 30°$, gdyż jest to kąt przyległy do $\sphericalangle ACB$. Kąty wewnętrzne przy wierzchołkach B, C i E trójkąta BCE mają więc miary odpowiednio $60°$, $30°$ i $90°$. Na mocy własności takiego trójkąta zachodzi równość $|CE| = h\sqrt{3}$.



Trójkąty prostokątne ACD i ABE mają wspólny kąt przy wierzchołku A, więc są podobne (kkk). Zatem

$$\frac{h\sqrt{3}+4}{h} = \frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AD|}{|CD|} = 3.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymamy $h = \frac{4}{3-\sqrt{3}} = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Odpowiedź: Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka B ma długość $2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

C3. Do wyłożenia kwadratowej posadzki o boku długości n użyto k kwadratowych płytek o bokach, których długości wyrażają się liczbami naturalnymi $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Niech $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Udowodnić, że liczby m i n są albo obie parzyste, albo obie nieparzyste.

Rozwiązanie. Skorzystamy z następującego faktu:

Jeśli a jest liczbą całkowitą, to liczby a i a^2 są tej samej parzystości.

Z treści zadania mamy

$$m = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \qquad \text{oraz} \qquad n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2,$$

zatem liczby m i n^2 są tej samej parzystości, jako sumy składników mających odpowiednio taką samą parzystość na mocy faktu. Na koniec zauważamy, że n i n^2 mają tę samą parzystość, więc m i n są albo obie parzyste, albo obie nieparzyste.

C4. Liczby a, b, c i d są długościami boków pewnego czworokąta. Dowieść, że

$$1 < \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} < 2.$$

Rozwiązanie. Niech

$$S = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c}.$$

Liczniki i mianowniki w tych ułamkach są dodatnie, więc zwiększając mianowniki, zmniejszymy wartość wyrażenia. Mamy zatem

$$S > \frac{a}{b+c+d+a} + \frac{b}{c+d+a+b} + \frac{c}{d+a+b+c} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1,$$

co dowodzi pierwszej z nierówności. Aby wykazać drugą, posłużymy się następującym faktem:

Jeśli $0 < x < y$ oraz $t > 0$, to $\frac{x}{y} < \frac{x+t}{y+t}$.

Aby go wykazać, zastosujemy metodę przekształceń równoważnościowych:

$$\frac{x}{y} < \frac{x+t}{y+t} \iff x(y+t) < y(x+t) \iff xt < yt \iff x < y,$$

co jest prawdą jako założenie.

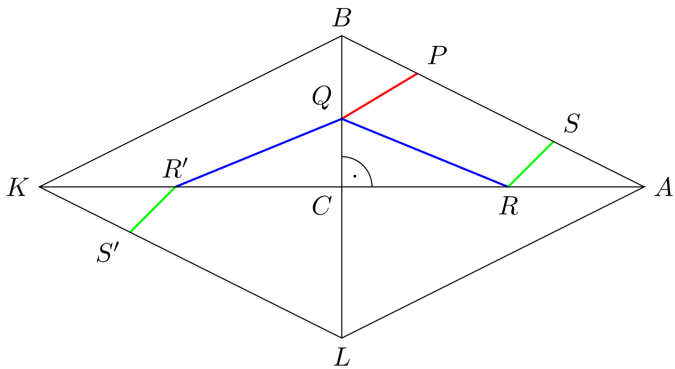
Ponieważ a, b, c i d są długościami boków czworokąta, zachodzą nierówności $0 < a < b+c+d$, więc na mocy powyższego faktu $\frac{a}{b+c+d} < \frac{a+a}{b+c+d+a}$. Rozumując analogicznie dla pozostałych składników sumy S, otrzymamy

$$S < \frac{a+a}{b+c+d+a} + \frac{b+b}{c+d+a+b} + \frac{c+c}{d+a+b+c} + \frac{d+d}{a+b+c+d} = 2,$$

co dowodzi drugiej nierówności.

C5. Dany jest trójkąt ABC z kątem prostym przy wierzchołku C. Punkty Q i R leżą odpowiednio na odcinkach BC i CA, a punkty P i S – na odcinku AB. Wykazać, że $|PQ|+|QR|+|RS| \geqslant 2h$, gdzie h jest długością wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka C.

Rozwiązanie. Rozważmy romb $ABKL$, którego środkiem symetrii jest punkt C. Niech R' i S' będą punktami symetrycznymi do punktów odpowiednio R i S względem punktu C. Wówczas R' i S' leżą odpowiednio na odcinkach CK i KL.



Mamy $|RS| = |R'S'|$, gdyż te odcinki są symetryczne względem punktu C. Ponadto $|QR| = |QR'|$, ponieważ są to odcinki symetryczne względem prostej BC. Długość łamanej $PQR'S'$ jest nie mniejsza od odległości między prostymi AB i KL, która jest równa $2h$. Ostatecznie otrzymujemy

$$|PQ| + |QR| + |RS| = |PQ| + |QR'| + |R'S'| \geqslant 2h,$$

co kończy dowód.

C6. Niech $C(n)$ oznacza liczbę cyfr w zapisie dziesiętnym liczby naturalnej n. Dla przykładu $C(5) = 1$, $C(120) = 3$. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba naturalna k, spełniająca równość

$$C(k) + C(k^2) + C(k^3) + \ldots + C(k^8) = 2019.$$

Rozwiązanie. Wykażemy, że taka liczba nie istnieje, rozważając dwa przypadki.

Przypadek I – niech $k < 10^{56}$. Wtedy dla naturalnych t zachodzi nierówność $k^t < 10^{56t}$, więc $C(k^t) \leqslant 56t$. Zatem

$$C(k) + C(k^2) + \ldots + C(k^8) \leqslant 56 + 2 \cdot 56 + \ldots + 8 \cdot 56 = 2016.$$

Przypadek II – niech $k \geqslant 10^{56}$. Wówczas dla naturalnych t zachodzi nierówność $k^t \geqslant 10^{56t}$, a więc $C(k^t) \geqslant 56t + 1$. Stąd

$$C(k) + C(k^2) + \ldots + C(k^8) \geqslant 56 + 1 + 2 \cdot 56 + 1 + \ldots + 8 \cdot 56 + 1 = 2024.$$

Podsumowując, nie jest możliwa równość $C(k) + C(k^2) + \ldots + C(k^8) = 2019$, gdyż wartość tej sumy, w zależności od k, wynosi co najwyżej 2016 lub co najmniej 2024.